MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT ÉS POGÁNY BÉLA

HARMINCHARMADIK ÉVFOLYAM

1926

JANUÁR—JÚNIUSI FÜZET

BUDAPEST 1926

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

TARTALOMJEGYZÉK.

MATHEMATIKAI
ÉS
PHYSIKAI LAPOK

HARMINCHARMADIK KÖTET

AZ EÖTVÖS LORÁND
MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT és POGÁNY BÉLA

BUDAPEST 1926

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA
AZ EÖTVÖS LORÁND MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

A MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI LAPOK

harmincharmadik kötetének tartalma.

JELENTÉS
AZ 1926. ÉVI KÖNIG GYULA JUTALOMRÓL.

AZ EÖTVÖS LORÁND Mathematikai és Physikai Társulat választmánya bizottságot küldött ki az 1926. évi KÖNIG GYULA jutalom ügyében; e bizottság (melynek tagjai RADOS GUSZTÁV elnöklete alatt FEJÉR LIPÓT, KÜRSCHÁK JÓZSEF és SZŰCS ADOLF voltak) a díjjal SZŐKEFALVI NAGY GYULÁ-nak, a kolozsvári Marianum igazgatójának és Ferenc József-tudományegyetemi magántanárnak eredményekben bővelkedő munkásságát óhajtotta kitüntetni és a jelentés megszerkesztésével a jelen sorok íróját bízta meg.

SZ. NAGY GYULA problémái, bár mind az algebra köréből erednek, változatos területre vezetik az olvasót. Hogy az áttekintést megkönnyitsük, csoportosítsuk SZ. NAGY dolgozatait tárgyaik szerint; a csoportosítás egyszersmind — és ez nem véletlen — időrendi beosztásnak is megfelel.

Az első csoportba tartozó dolgozatokat doktori értekezésének címével lehet jellemezni, amely «algebrai görbék arithmetikai tulajdonságairól» szól (1).[1] E dolgozatok oly algebrai síkgörbéket tárgyalnak, amelyeknek egyenletében csak közönséges egész számú együtthatók szerepelnek. Az egyik kérdés az, van-e ilyen görbén racionális pont, azaz pont, amelynek koordinátái racionális számok? Speciális esetekben e kérdés JACOBI-ra, FERMAT-ra és EULER-re, sőt DIOPHANTOS-ra nyulik vissza; POINCARÉ általános jellegű tételeket állított fel és kimutatta, hogy p elemű racionális pontcsoportból kiindulva (p a görbe nemszáma, racionális pontcsoport az olyan, amelynek koordinátáiból alakított

---

[1] A zárjelbe tett számok a «Jelentés»-hez csatolt jegyzékre utalnak.

elemi szimmetrikus függvények racionális számok) új p elemű racionális pontcsoporthoz juthatunk. Lényeges, hogy p kisebb a görbe rendszámánál (különben a tétel jóformán magától értetődik); de mindenképpen nevezetes, hogy a racionális pontcsoportoknál éppen a görbe nemszámának van szerepe. POINCARÉ vizsgálatai után is fennmaradt az a kérdés, hogy vannak-e egyáltalában racionális pontcsoportok adott (racionális együtthatókkal bíró) algebrai görbén és ha vannak, hogyan lehet őket meghatározni. Ilyen természetű problémákkal foglalkozik SZ. NAGY GYULA első dolgozataiban (1, 2, 3, 5, 18, 23, 24, 25, 34), melyekhez az ösztönzést SCHLESINGER LAJOS kolozsvári egyetemi tanártól nyerte. Bebizonyítja (1, 18), hogy ha a görbe rendszáma n és az eggyel kisebbített nemszám $p-1$ relatív prímszámok, akkor van p elemű racionális pontcsoport a görbén. Ebből következteti, hogy másodnemű görbén mindig van (általában kétszeresen végtelen sok) két elemű racionális pontcsoport. Megállapítja továbbá (5, 34), hogy n és $2p-2$ legnagyobb közös osztójának számértéke igen fontos a görbe arithmetikai viselkedésének szempontjából. Ez határozza meg azon görbék rendszámát, amelyekbe egy n-edrendű, p-ednemű görbe biracionális transzformációval mindig átvihető. Természetesen a biracionális transzformációk közül is csak azokat engedjük meg, amelyeknek együtthatói racionális számok. Ugyancsak a szóban forgó legnagyobb közös osztó határozza meg a görbén fellépő racionális pontcsoportok elemszámát. Nevezetesen, ha m alatt az n és $2p-2$ legnagyobb közös osztójának bármely $p-1$-nél nagyobb értékű többszörösét értjük (például $2p-2$-t), kijelenthetjük, hogy m elemet tartalmazó racionális pontcsoport mindig van a görbén. Továbbá, ha $m>p+1$, akkor a görbe biracionális transzformációval átvihető ugyancsak p-ednemű és pontosan m-edrendű görbébe, tehát speciálisan: minden másodnemű görbe negyedrendű másodnemű görbébe. Ezek a tételek HILBERT és HURWITZ-nak régebbi, 0 nemszámmal bíró görbékre vonatkozó eredményeit általánosítják.

HILBERT vizsgálataihoz kapcsolódnak SZ. NAGY GYULÁ-nak egyéb tételei, amelyek algebrai függvények arithmetikai tulajdonságairól tesznek kijelentéseket. Mint különösen meglepőt kiemeljük közülök a következőt (6, 19): ha az m változós irreducibilis algebrai függvény racionális értéket is felvesz valahányszor a változók helyébe pozitív egész számokat teszünk, az illető függvény az m változónak racionális függvénye, sőt racionális egész függvénye, ha a szóban forgó racionális helyettesítési értékek (véges) közös nevezővel írhatók.

Sz. Nagy Gyula értekezéseinek második csoportja (4, 10, 11, 21, 30, 31, 32, 33) azon kapcsolatokkal foglalkozik, amelyek racionális egész függvények gyökei és e függvények differenciálhányadosának gyökei között fennállnak. Az arithmetikai kérdéseket és módszereket függvénytani kérdések és módszerek váltják fel. A problémák kiindulópontja az a Gauss-féle tétel, mely szerint, ha egy algebrai egyenlet gyökpontjai köré megrajzoljuk a legkisebb konvex sokszöget, az egyenlet többtagújának differenciálhányadosa csak e sokszög belsejében vagy szögpontjaiban tünik el. A továbbiak jobb megértése kedvéért vázoljuk e tétel egyik bizonyítását. Legyen x_k az $f(x)=0$ egyenletnek gyöke és legyen n_k e gyöknek multiplicitása; tudjuk, hogy az $\frac{f'(x)}{f(x)}$ hányados egyenlő az összes $\frac{n_k}{x-x_k}$ alakú tagok összegével. Ha x gyöke az $f'(x)=0$ egyenletnek és nem esik egyik x_k-val sem össze, akkor a szóban forgó összeg zérus

$$\Sigma \frac{n_k}{x-x_k} = 0.$$

Legyen φ_k az $x-x_k$ különbség argumentuma; szorozzuk meg egyenlőségünket $e^{-i\psi}$-vel és írjuk fel, hogy a szorzatösszeg valós része eltünik. A valós részben az egyes tagok olyan jelüek, mint $\cos(\varphi_1+\psi)$, $\cos(\varphi_2+\psi)$, ... E cosinusok tehát nem lehetnek valamenyien pozitivok vagy valamennyien negativok; ez annyit jelent, hogy az az egyenes, melyet az x gyökön át a képzetes tengelyhez ψ szög alatt fektetünk, szétválasztja az adott $f(x)=0$ egyenlet gyökeit. Azonban a ψ szöget szabadon választhatjuk, tehát a következtetés minden irányú egyenesre fennáll. Ezzel a tételt bebizonyítottuk.

Ennek a bizonyításnak az alapgondolatát használja fel Sz. Nagy számos érdekes tétel levezetésére. Például bebizonyítja (30), hogy

Ha egy csak valós gyökökkel bíró n-edfokú $f(x)=0$ algebrai egyenlet legkisebb és legnagyobb gyökének közét n egyenlő részre osztjuk, akkor mind a két szélső részben van gyöke az $f'(x)=0$ egyenletnek.

Laguerre kimutatta, hogy ha csak valós gyökökkel bíró n-edfokú $f(x)=0$ egyenlet két egymásutáni gyökének közét n egyenlő részre osztjuk, a szélső részekben nincs gyöke az $f'(x)=0$ egyenletnek. Sz. Nagy úgy általánosította e tételt, hogy felvesz két gyököt, α-t és β-t ($\alpha>\beta$), amelyek között $h-1$ számú gyök foglaltatik ($h\geq 1$) és bebizonyítja, hogy az $f'(x)$ egyenletnek α és β között fekvő összes (h számú) gyökei nem foglaltatnak sem α és $\alpha+\frac{\beta-\alpha}{n}h$, sem β és $\beta-\frac{\beta-\alpha}{n}h$ között. Ebből Laguerre tételét kapjuk, ha speciálisan h-t egyenlőnek vesszük eggyel.

A most említett és más hasonló tételek azért érdekesek, mert megmutatják, hogy bizonyos esetekben (racionális egész függvényeknél) a Rolle-tételnek milyen pontosabb alakot lehet adni.

Idézzük még e körben Jensen egy tételét, melyet Sz. Nagy újra bebizonyított (32) és általánosított.

Legyenek az $f(x)=0$ egyenlet együtthatói valósak. Ismervén ezen egyenlet gyökeit, Gauss tétele szerint kijelölhetünk az $f'(x)=0$ egyenlet gyökei számára egy véges tartományt. Jensen a képzetes gyökök számára megad egy másik tartományt, mely a Gauss-félénél sok esetben jóval kisebb. Kössük össze nevezetesen az $f(x)=0$ egyenlet két-két konjugált gyökét egy-egy egyenesdarabbal és rajzoljunk ezekre, mint átmérőkre köröket. Jensen szerint: e körök összesége is magában foglalja az $f'(x)=0$ egyenlet képzetes gyökeit.

SZ. NAGY GYULA kimutatta, hogy ha γ nem negativ és ϑ akármilyen valós számot jelent, akkor az említett körök a $(-\gamma x+\vartheta) f(x)+f'(x)=0$ egyenlet képzetes gyökeit is tartalmazzák. Bizonyításának alapgondolata az, hogy bevezeti, valószínűleg PÓLYA és SCHUR dolgozatainak hatása alatt, a $F(x)=e^{-\frac{\gamma}{2}x^2+\delta x} f(x)$ függvényt és a GAUSS-féle fentebb vázolt elvet a $\frac{F'(x)}{F(x)}$ törtre alkalmazza.

Egy másik tőle származó általánosítás a következő: Legyen δ akármilyen (valós vagy nem valós) szám; legyen továbbá β_1, β_2 két tetszésszerinti és a valós együtthatós $f(x)=0$ egyenlet gyökeitől különböző gyöke a $\delta f(x)+f'(x)=0$ egyenletnek. Fektessünk a β_1, β_2 pontokon át egyenlő oldalú hiperbolát, amelynek $\beta_1 \beta_2$ átmérője legyen. Ilyen hiperbola végtelen sok van. A tétel úgy szól, hogy e hiperbolák bármelyike szétválasztja az $f(x)=0$ egyenlet gyökeit, hacsak nem megy át az egyenlet összes gyökein. (A szétválasztás úgy értendő, hogy minden hiperbolának van belseje, ahová nem hatolnak az érintők és külseje, amit az érintők beborítanak; a gyökök egy része a hiperbolán belül, más része kívül van.)

A GAUSS-féle tétel gondolatkörébe vágnak azok a kapcsolatok, amelyeket SZ. NAGY bizonyos módon összefüggő (nem éppen $f(x)=0$ és $f'(x)=0$ alakú) egyenletek gyökei között felfedezett (11). Példaképen megemlítjük a következőt: Legyenek $x_1, x_2, \ldots, x_n$ az $f(x)=0$ egyenlet összes gyökei és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszésszerinti nem negativ valós számok. Tekintsük $f(x)=0$ mellett az

$$f(x)\left[a_1 \frac{\xi-x_1}{x-x_1}+\cdots+a_n \frac{\xi-x_n}{x-x_n}\right]=0$$

«poláris» egyenletet. Minden kör, mely átmegy a ξ «póluson» és a poláris egyenlet akármelyik gyökén, szétválasztja az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ gyököket vagy átmegy valamennyijükön. Ha ξ végtelen és $a_1=a_2=\ldots=a_n$, speciális esetképen kijön a GAUSS-tétel.

A szegedi Acta-ban Sz. NAGY definiál (21) egy T_n-nek nevezett tartományt, mely a konvex burok általánosításának tekinthető és amely a gyökök elméletében érdekes szerepet játszik. Ha felvesszük mindazon pontokat, amelyekből valamely ponthalmaz legfeljebb π szög alatt látszik, kapjuk az illető halmazt burkoló legkisebb konvex tartomány (röviden: konvex burok) külsejét. Tekintsük azon pontokat, amelyekből a halmaz adott α vagy ennél kisebb szög alatt látszik ($\alpha \leqq \pi$); ekkor az előbbi külső tartománynak nyilván részét kapjuk, tehát a kiegészítő tartomány a halmaz konvex burkát magában foglalja. Legyen speciálisan $\alpha = \frac{\pi}{n}$ és nevezzük T_n-nek a halmazt és annak konvex burkát körülvevő, most értelmezett tartományt. Sz. NAGY azon tételeinek egyike, amelyekben T_n szerepet játszik, így szól: Legyenek adva akármilyen nagy számban határozott fokszámú, mondjuk n-edfokú egyenletek:

$$f_1(x) = 0, \ldots, f_s(x) = 0$$

és állapítsuk meg gyökeik összességének halmazához a T_n tartományt. Ha $a_1, \ldots, a_s$ akármilyen nem negatív valós számok, akkor az

$$a_1 f_1(x) + \ldots + a_s f_s(x) = 0$$

valamint az

$$\frac{a_1}{f_1(x)} + \cdots + \frac{a_s}{f_s(x)} = 0$$

egyenletek összes gyökei a T_n tartomány belsejébe esnek és általában e T_n tartomány nem pótolható kisebbel.

A helyett, hogy e tétel általános jellegű folyományainál időznénk, említsük meg, hogyan sikerült általa FEKETE MIHÁLY-nak egy szép eredményét kiterjeszteni. Legyen $Q(x)$ n-edfokú (komplex együtthatós) polinom, mely $x = a$-nál az α és $x = b$-nél a β értéket veszi fel. Mely körben veszi fel biztosan az $\alpha\beta$ egyenesdarabon fekvő számokat? FEKETE szerint az $\frac{a+b}{2}$ középponttal és $\frac{|a-b|}{2} \cot \frac{\pi}{2n}$ sugárral biró körben.

Ezt az eredményt Sz. NAGY így terjeszti ki (33). Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_m$ azok az értékek, amelyeket az n-edfokú $Q(x)$ polinom az $x = a_1, a_2, \ldots, a_m$ helyeken felvesz. Tekintsük az $a_1, a_2, \ldots, a_m$ ponthalmazt körülvevő T_n tartományt és azt a legkisebb kört, mely a T_n-et magában foglalja. Sz. NAGY szerint ebben a körben $Q(x)$ felveszi mindazon értékeket, amelyeknek képe az $a_1, a_2, \ldots a_m$ pontok konvex burkában foglal helyet. Mivel már FEKETE kimutatta, hogy az $m = 2$ esetben nem lehet a szóban forgó kört kisebb körrel pótolni, természetesen annál kevésbbé lehet az általános esetben a megadottnál kisebb körre vonatkoztatni a tételt.

Sz. NAGY GYULA munkáinak harmadik csoportjában (7, 9, 12, 13, 14, 17, 28, 35, 36) a topológia szempontjai dominálnak kezdetben algebrai, később általánosabb valós görbék vizsgálatánál. Magyarázzuk meg mindenekelőtt, mit ért hurkolt és láncolt görbék (9, 28) alatt. Zárt térgörbét hurkoltnak nevez, ha a görbe nem határvonala «elemi» (azaz körlemezből folytonos deformációval származtatható) felületnek; a görbét láncoltnak nevezi, ha több össze nem függő darabból áll, amelyek közül egy sem foglalható «elemi» (azaz a gömb folytonos deformációjával származtatható) és a másiknak egy pontját sem tartalmazó térrészbe. Sz. NAGY főproblémája a következő: Adva lévén egy valós algebrai síkgörbe, melynek kettős pontjain kívül egyéb singularitása nincs, van-e olyan algebrai térgörbe, amelynek derékszögű vetülete a megadott síkgörbe úgy, hogy a vetület kettős pontjainál látszólag kereszteződő térbeli görbe ágak közül szabadon elő van írva, hogy melyik legyen a felső és melyik az alsó? E kérdésre igenlő a felelet és Sz. NAGY két módszert is ad, amelyekkel találhatunk térbeli és a kívánt tulajdonságokkal felruházott algebrai görbéket.

Legterjedelmesebb értekezésében (36) Sz. NAGY azokkal a valós (nem speciálisan algebrai) síkgörbékkel foglalkozik, amelyek adott rend- vagy osztályszám mellett a legnagyobb rend- vagy osztályindexszel bírnak. E fogalmak értelmezése a következő: valamely valós görbét különböző egyenesekkel metszvén, a metszéspontok számának maximumát nevezzük rendszámnak, minimumát rendindexnek; valamely valós görbéhez különböző pontokból érintőket vonván, az érintők számának maximumát nevezzük osztályszámnak, minimumát osztályindexnek. (Algebrai görbék rendje és osztálya a most értelmezett rend- és osztályszámmal vagy egyenlő vagy azoknál nagyobb.) Ha a rend- vagy osztályszám n, akkor a rend- vagy osztályindex maximuma $n-2$. Sz. NAGY megmutatja, hogyan lehet a maximális indexet megvalósítani és megállapítja a maximális indexű görbék számos érdekes tulajdonságát, például, hogy maximális rendindexszel biró görbe olyan össze nem függő vonalakból állhat, amelyeknek indexei együttvéve alatta maradnak az egész görbe indexének. Ezzel kapcsolatban bevezeti a valós görbék reducibilitásának fogalmát (a görbe reducibilis, ha olyan össze nem függő vonalakból áll, amelyeknek rend- vagy osztályszámai együttvéve kiteszik a görbe rend- vagy osztályszámát) és bebizonyítja például, hogy ha valamely görbének osztályszámával összeférő legnagyobb osztályindexe van és reducibilis, akkor olyan görbékre esik szét, amelyek szintén a lehető legnagyobb osztályindexszel bírnak, továbbá, hogy az ilyen görbe irreducibilitásának szükséges és elegendő feltétele, hogy össze nem függő vonalainak osztályindexei együttvéve a görbe osztályindexét adják.

Legutolsó dolgozataiban (12, 13, 14) Sz. NAGY egy GAUSS-féle tisztán topológiai kérdésre fordítja figyelmét. Képzeljünk egy zárt, végesben fekvő, n kettős ponttal biró vonalat; számozzuk meg a kettős pontokat $1, 2, \ldots, n$-ig és járjuk be a görbét. Minden kettős ponttal kétszer találkozunk és a kettős pontok számait a találkozás rendjében egymás mellé írva, az $1, 2, \ldots, n$ elemek ismétléses permutációját kapjuk, amelyben minden elem kétszer szerepel.

Már GAUSS kimondotta (bizonyítás nélkül), hogy e permutációkban minden kettős pont egyszer páros, egyszer páratlan helyen fordul elő. Sz. NAGY e tételt egy általánosabból vezeti le és bebizonyítja, hogy ha két görbéhez — kettős pontjaik megfelelő jelzése mellett — ugyanaz a permutáció tartozik, akkor a két görbe folytonos deformációval egymásba vihető (isotopok). Lehet-e a mondott szerkezettel biró bármely permutációhoz megfordítva neki megfelelő síkgörbét találni? Erre a kérdésre Sz. Nagy-gyal csak annyit mondhatunk, hogy véges számú lépéssel a felelet eldől és hogy ha a felelet igenlő, akkor véges számú lépésben a kívánt görbét meg is lehet szerkeszteni. Sz. Nagy ezeket a görbéket ciklusokra bontja és részletes vizsgálat tárgyává teszi a 2, 3 vagy 4 ciklusból álló görbéket; azután kiterjeszti az eredményeket olyan görbékre, amelyeknek minden többszörös pontja ugyanazzal a (2-nél esetleg nagyobb) multiplicitással bír.

Bár nem említettük fel mindazon kérdéseket, amelyeknek megoldásához Sz. Nagy Gyula új eszmékkel hozzájárult és távolról sem soroltuk fel a neki köszönhető összes új eredményeket, azt hisszük sikerült képet nyujtanunk sokoldalú és eredményes munkásságáról. Kérjük a tisztelt választmányt, járuljon hozzá a bizottság abbeli javaslatához, hogy az 1926. évi König Gyula jutalom Sz. Nagy Gyulá-nak ítéltessék oda.

Szűcs Adolf.

SZ. NAGY GYULA MUNKÁINAK JEGYZÉKE.

Mathematikai és Physikai Lapok.

1. Algebrai görbék arithmetikai tulajdonságairól. 18. köt. (1909), 331—348; 21. köt. (1912), 58—66.

2. Negyedrendű másodfajú görbék származtatásáról. 22. köt. (1911), 23—24. old.

3. Negyedrendű másodfajú görbékről. 26. köt. (1917), 107—124. old.

4. Adott nullapontokkal és pólusokkal biró függvényekről. 27. köt. (1918), 72—75. old.

Mathematikai és Természettudományi Értesítő.

5. Arithmetikai vizsgálatok a magasabbfajú ternær egyenletek körében. 30. köt. (1912), 443—457. old.

6. Algebrai függvények arithmetikai tulajdonságairól. 32. köt. (1914), 69—84. old.

7. Sík és térbeli algebrai görbék reális meneteiről. 33. köt. (1915) 544—560. old.

8. Másodfajú normálgörbékről. 34. köt. (1916), 71—89. old.

9. Hurkolt és láncolt algebrai térgörbék algebrai előállításáról. 33. köt. (1915), 500—506. old., 34. köt. (1916), 787—800. old.

10. Geometriai relaciók valamely racionális egész függvénynek és logarithmusa deriváltjainak zérus-helyei között. 38. köt. (1921), 429—441. old.

11. A poláris egyenletek gyökei helyzetéről. 38. köt. (1921), 442—455. old.

12. Általános vizsgálatok egy GAUSS-féle topológiai problémáról. 42. köt. (1925), 254—26. old.

13. Speciális vizsgálatok egy GAUSS-féle topológiai problémáról. 42. köt. (1925), 269—278. old.

14. Végesben fekvő síkgörbék többszörös pontjairól. 42. köt. (1925), 279—291. old.

15. Végesbe nem projiciálható síkgörbékről. 43. köt.

16. Gömbi görbékről. 43. köt.

A Szent István Akadémia Értesítője.

17. Maximális indexü felületek. 9. köt. (1924), 117—132. old.

Mathematische und Naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn.

18. Über arithmetische Eigenschaften algebraischer Kurven. Bd. 26. (1910), 168—195.

19. Über arithmetische Eigenschaften algebraischer Funktionen. Bd. 30. (1915), 324—340.

20. Über eine neue Ableitung der hyperelliptischen Kurven vierter Ordnung. Bd. 30. (1915), 341—342.

Acta Litt. ac Scient. Reg. Univ. Francisco-Josephinæ. Sect. Sc. Math.

21. Über die Lage der Wurzeln von linearen Verknüpfungen algebraischer Gleichungen. Bd. 1. (1923), 127—138.

22. Über einen v. Staudt'schen Satz. Bd. 2. (1924), 65—68.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

23. Über ein Theorem von JACOBI und seine Verallgemeinerung. Bd. 18. (1909), 4—7.

24. Bemerkung zu der Abhandlung des Herrn P. v. SCHAEWEN. Bd. 18. (1909), 401—402.

25. Die Anwendung der birationalen Transformationen einer algebraischen Kurve von höherem Geschlechte in sich auf ein Diophantisches Problem. Bd. 21. (1912), 183—191.

26. Über einen Satz von H. JUNG. (Aus einem Briefe an W. BLASCHKE.) Bd. 24. (1916), 390—392.

27. Über den symbolischen Kalkul von EMIL WEYR auf den elliptischen Kurven. Bd. 24. (1916), 457—461.

28. Über die algebraische Darstellung der verknoteten und verketteten algebraischen Raumkurven. Bd. 25. (1916), 285—293.

29. Über eine räumliche Darstellung Riemann'scher Flächen vom Geschlechte p mit $p+1$ Symmetrielinien. (Aus einem Briefe an L. SCHLESINGER.) Bd. 26. (1917), 109—113.

30. Über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln. Bd. 27. (1918), 37—43.

31. Über geometrischen Relationen zwischen den Wurzeln einer algebraischen Gleichung und ihrer Derivierten. Bd. 27. (1918), 44—48.

32. Zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Bd. 31. (1922), 238—251.

33. Über einen Satz von M. FEKETE. Bd. 32. (1923), 307—309.

Mathematische Annalen.

34. Zur arithmetischen Theorie der ternären Gleichungen von höherem Geschlechte. Bd. 73. (1912), 230—240.

35. Über die reellen Züge algebraischer ebener und Raum-Kurven. Bd. 77 (1916), 416—429.

36. Über Kurven von Maximal-Klassenindex. Über Kurven von Maximalindex. Bd. 89. (1923), 32—75. Bd. 90. (1924), 152—153.

MEGJEGYZÉS A NEM PRIMÄR SZÁMTESTEKHEZ.

A körosztási számtestek WEBER szerint primär és nem primär számtestekre oszlanak; e felosztás kritériuma gyanánt bizonyos Q csoportok szolgálnak, melyeket ideiglenesen discriminánscsoportoknak nevezhetünk. E kétféle számtestek vizsgálatát megtalálhatjuk H. WEBER: Lehrbuch der Algebra c. m. 73—86. lapjain (II. k. 1899.). E vizsgálat azonban korántsem oly kimerítő, hogy kiegészítő megjegyzést ne kivánna. Nevezetesen a nem primär számtestek második faját kell kissé jobb megvilágításba helyezni.

A nem primär számtestek e második faját jellemzi, hogy a nem primär jelleget eldöntő Q csoport oly q törzsszámhoz tartozik, amely az alapúl szolgáló α primitív egységgyök fokszámában, m-ben egynél magasabb kitevővel szerepel. A Q csoport elemeit, ha

$$m_1 = \frac{m}{q}$$

jeleléssel élünk, az m-ig terjedő számok közül oly x számok adják, amelyek

$$x \equiv 1 \ (\mathrm{mod.}\ m_1)$$

kongruenciát kielégitik és emellett m-hez viszonylagos törzsszámok; jelen esetben, minthogy a q-ra tett kikötés szerint m_1 modulus m-nek minden törzstényezőjét tartalmazza, Q csoport elemeinek száma q.

Ha az A csoport elemeit

$$1,\ a',\ a'',\ a''',\ldots$$

sorozattal jelöljük, akkor az A csoporthoz tartozó KUMMER-féle periodus

$$\eta = a + a^{a'} + a^{a''} + a^{a'''} + \cdots$$

határozza meg a vizsgálandó nem primär számtestet; természetesen fel kell téteieznünk, hogy A csoport tartalmazza Q csoportot s ebben az esetben az A csoporthoz tartozó és η-tól meghatározott számtest valóban a nem primär számtestek második fajához tartozik. E számtest vizsgálatát éppen nem primär jellegénél fogva nem az m-edik egységgyök számtestében kell megejteni; felvetődik tehát a kérdés, hogy számtestünk milyen alacsonyabb fokú egységgyökös számtestben veszti el nem primär jellegét. E kérdés önként megoldódik, ha η periodus értékét megállapítjuk.

Kiindulunk azon feltevésből, hogy A csoport osztható Q-val és igy áll reá a következő szétbontás:

$$A = Q + a_1 Q + a_2 Q + a_3 Q + \ldots,$$

ahol a dolog természete szerint

$$1, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

elemek m-hez szintén viszonylagos törzsszámok; ennek alapján A csoportnak tetszőleges eleme

$$a\,(hm_1 + 1)$$

alakkal nyer kifejezést, ahol a az

$$1, a_1, a_2, a_3, \ldots$$

sorozat elemeit képviseli, míg h a

$$0, 1, 2, 3, \ldots (q-1)$$

értékeket veszi fel. Ennek alapján

$$\eta = \sum^{a} \sum_{q-1}^{h=0} a^{a\,(hm_1+1)};$$

az összegezést h szerint végrehajtva

$$\eta = \sum^{a} \frac{\alpha^{a}(\alpha^{aqm_1}-1)}{\alpha^{am_1}-1}$$

eredményhez jutunk; s minthogy

$$\alpha^{am_1} \neq 1, \quad \text{de} \quad \alpha^{aqm_1} = 1,$$

ezért a periodus értéke 0.

Ezzel a megállapítással egyrészt rávilágítottunk L. FUCHS[1] dolgozatára, melyben hosszadalmas uton foglalkozik azon kérdéssel, hogy mikor lesz egy KUMMER-féle periodus értéke 0; másrészt, mivel nem primär számtestünk alapszámai gyanánt

$$1, \eta, \eta^2, \eta^3 \ldots$$

sorozatot vehetjük, rögtön látjuk, hogy nem primär számtestünk ebben az esetben a racionális számok összesége.

A fentivel egyező eljárással igazolható, hogy a többi konjugált periodus értéke szintén 0. Ez azután egyszerű és természetes okát adja annak, hogy a periodusokhoz tartozó resolvens értéke szintén 0, amely eredményhez WEBER az idézett helyen jóval nehézkesebb módon jut.

Befejezésül felhivom a figyelmet arra, hogy H. WEBER i. m. 79. lapján említett

$$A_3 = 1, 17, -1, -17$$

csoport, bár két primär csoport összetételéből származik, mégsem primär, amit azonnal észreveszünk, ha e csoportot rendes alakjába írjuk át:

$$A_3 = 1, 17, 35, 19;$$

hiszen e csoport osztható

$$Q_1 = 1, 19$$

discriminăns-csoporttal.

Tihanyi Miklós.

---

[1] L. FUCHS: Über die Perioden, welche aus den Wurzeln der Gleichung $\omega^n = 1$ gebildet sind... Journal für Math. Bd. 61. 1862.

BEMERKUNG ÜBER DIE NICHT PRIMÄREN ZAHLKÖRPER.

Eine KUMMER'sche Periode

$$\eta = \sum^{a} \alpha^{a}$$

wird 0, wenn die in der Periode auftretenden a Elemente eine solche A Gruppe geben, welche die Gruppe Q enthält; die Elemente der Gruppa Q ergeben sich aus der Kongruenz

$$a \equiv 1 \pmod{m_1}.$$

Hier sind

$$\alpha = e^{\frac{2\pi i}{m}}, \quad m_1 = \frac{m}{q}, \quad m_1 \equiv 0 \pmod{q};$$

m ist irgend eine ganze positive Zahl und q eine Primzahl.

N. Tihanyi.

ÚJ MÓDSZER AZ ÓRASZÖG MEGHATÁROZÁSÁRA.

A csillag declinatio (δ), a földrajzi szélesség (φ) ismerete s a csillagmagasság (m) megmérése alapján az óraszög (ω) meghatározása többféle módon szokott történni.

A csillagpositió-háromszögre alkalmazott cosinus tételből közvetlenül folyik, hogy

$$\cos\omega = \frac{\sin m - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}. \qquad (1)$$

Ebből szorzatos alakban s a $z = 90^\circ$-m jelzés bevezetésével

$$\operatorname{tng}\frac{\omega}{2} = \sqrt{\frac{\sin {}^1/_2(z-\varphi+\delta)\sin {}^1/_2(z+\varphi-\delta)}{\cos {}^1/_2(z+\varphi+\delta)\cos {}^1/_2(\varphi+\delta-z)}}. \qquad (2)$$

Lásd pl. Brünnow: Sphaerische Astronomie, negyedik kiadás, 264 lap. — Newcomb: Spherical Astronomy, 134 lap.

Használják a következő képletet is, mely ugyancsak az 1)-ből következik egyszerű átalakítással:

$$2\sin^2\frac{\omega}{2} = \frac{\cos(\varphi-\delta) - \sin m}{\cos\varphi\cos\delta}. \qquad (3)$$

Lásd pl. Stupar: Astronomische Navigation 73. §.

Úgy a 2. mint a 3. képlet alkalmazása elég hosszadalmas. A 2. a logarithmus tábla ötszöri használatát kívánja. A. 3. szükségessé teszi kétszer a szögfüggvény táblázat, négyszer a logarithmus tábla és egyszer egy speciális számtáblázat $\left(y = 2\sin^2\frac{\omega}{2}\right)$ használatát. Lásd pl. Nautische Tafeln, Pola: 3-ik táblázat.

Ezért a tengerészeti asztronomiában nemcsak az óraszögmeghatározásnál, hanem másféle feladatoknál is, pl. a horizontális koordináták meghatározásánál, *két-* vagy *háromargumen-*

tumos számtáblázatok alkalmazására törekedtek a munka megrövidítése végett. Ilyenek az *azymuth-táblák*, hol három ilynemű kétargumentumos számtáblázatból való kiolvasás teszi lehetővé az azymuth meghatározását a következő képletek alapján:

$$\frac{\text{cotng}\ \alpha}{\cos\varphi} = -\frac{\text{tng}\ \varphi}{\text{tng}\ \omega} + \frac{\text{tng}\ \delta}{\sin\omega}.$$

Lásd Nautische Tafeln, Pola, 17-ik táblázat, Nautische Tafeln, Berlin, 39—40. tábla.

Ilyenek a háromargumentumos *magassági táblázatok*. Lásd pl. Fr. Ball: Altitude Tables, London. Ilyenek a háromargumentumos *óraszögtáblázatok*. Pl. Davis: Chronometer tables or hour angles... London, 1899.

Azonban ezek közül a számolás megrövidítésére és a minden lehetőségnél való használatra a háromargumentumos magassági és óraszögtáblák nem alkalmasak, mert nagy terjedelmök dacára egyik másik argumentumnak csak szűkebb értékkörére terjednek ki. Pl. a Ball-féle magassági táblák a declinatióban 0°-tól 24°-ig, a földrajzi szélességben 0°-tól 60°-ig, a Davis-féle óraszögtáblák földrajzi szélességben 0°-tól 50°-ig terjednek. Továbbá az argumentumoknak foknál pontosabb értékeire való interpoláció három argumentum mellett igen nehézkes dolog.

E tekintetben célszerűbbek a kétargumentumos táblázatok, pl. az azymuthtáblák, mert itt az esetleges interpoláció könnyebben elvégezhető, bár az alkalmazás köre itt sem teljes, mert az egyik argumentum csak 0°-tól 60°-ig szerepel.

E csoportba tartoznak és igen előnyös beosztásúak a Csorba-féle *univerzális szélességi és hosszúsági számtáblázatok*. (Cs. Gy.: A csillagok láthatósági adatairól és a földrajzi tájékozódásról. Miskolc, 1922.) Itt ugyanis az interpoláció kényelmes elvégzésére mindkét argumentumra vonatkozólag korrekció-számsorok vannak beiktatva és meglepően egyszerű interpoláció szabály van bevezetve. Azonban idáig olyan képlet vagy eljárás nem volt ismeretes, mely az óraszögmeghatározásban kétargumentumos számtáblázatokra vezet, ezért idáig a Csorba-féle számtáblázatok is mindenféle feladat megoldására használhatók voltak, csak óraszögmeghatározásra nem.

Vannak ugyan a tengerészeti használatban kétargumentumos óraszögtáblák, de ezek csak egészen *speciális esetekre* vonatkoznak, pl. a felkelési és lenyugvási óraszögre, az első vertikálisban vagy a legnagyobb digresszióban való óraszögre. Lásd Nautische Tafeln, Pola, 19. és 21. tábla, Nautische Tafeln, Berlin, 42. és 44. tábla. Ez utóbbi táblázatok sorra a következő definicionális képletek szerint vannak konstruálva:

$$\begin{aligned} \cos\omega &= -\operatorname{tng}\varphi \operatorname{tng}\delta, & \varphi+\delta &< 90^\circ, \\ \cos\omega &= \operatorname{tng}\delta \operatorname{cotng}\varphi, & \delta &< \varphi, \\ \cos\omega &= \operatorname{tng}\varphi \operatorname{cotng}\delta, & \varphi &< \delta. \end{aligned}$$

Jelen dolgozatban *olyan eljárást* állapítok meg, *melynek alkalmazásával, hasonlókép, mint az azymuthmeghatározásnál történik, kétargumentumos számtáblázatokból való három kiolvasással az óraszög minden esetben meghatározható.*

Ezzel az óraszögmeghatározás, mely valamennyi csillagászati, földrajzi és tengerészeti feladat között a legfontosabb, jelentékenyen egyszerűsbödik és megrövidül.

A délköri segédkoordináták alkalmazására vonatkozó tanulmányom szerint (Cs. Gy.: A csillagok láthatósági adatairól stb.), ha a délköri horizontális hosszúság ϱ, a délköri equatoriális hosszúság ϱ_0, a délköri horizontális szélesség μ, a délköri equatoriális szélesség μ_0, úgy a derékszögű gömbháromszög tételei alapján állanak a következő összefüggések:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotng}\varrho_0 &= \cos\omega \operatorname{cotng}\delta \\ \sin\mu_0 &= \sin\omega\cos\delta \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \operatorname{cotng}\omega &= \cos\varrho_0 \operatorname{cotng}\mu_0 \\ \sin\delta &= \sin\varrho_0\cos\mu_0 \end{aligned}\right\}$$

$$\mu = \mu_0, \quad \varrho - \varrho_0 = 90^\circ - \varphi$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{cotng} a &= \cos\varrho \operatorname{cotng}\mu \\ \sin m &= \sin\varrho\cos\mu \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \operatorname{cotng}\varrho &= \cos a \operatorname{cotng} m \\ \sin\mu &= \sin a\cos m \end{aligned}\right\}$$

Ezeknek akár a horizontális koordináták, akár az euqatoriális koordináták meghatározására, akár a földrajzi szélesség kiszámítására való berendezése az illető dolgozatban ki van fejtve.

Most megmutatjuk, hogy megadják a módot az óraszög célszerűen való meghatározására is.

A fenti képletek első sorából következik, hogy

$$\cos \omega = \frac{\operatorname{cotng} \varrho_0}{\operatorname{cotng} \delta}.$$

Ez megadja az óraszöget, ha előbb ϱ_0 értékét a δ, m, φ által meghatározzuk. Ez pedig úgy történik, hogy ki tudjuk számítani a

$$\frac{\varrho + \varrho_0}{2} = R$$

összeget, a kétféle délköri hosszúság számtani középarányosát, ez a

$$\frac{\varrho - \varrho_0}{2} = \frac{90° - \varphi}{2}$$

relációval kapcsolatban aztán már ϱ_0 értékét szolgáltatja, ugyanis

$$\varrho_0 = R - \frac{90 - \varphi}{2}.$$

A fenti képletek 2-ik, 4-ik és 6-ik sorából következik, hogy

$$\frac{\sin \varrho}{\sin \varrho_0} = \frac{\sin m}{\sin \delta}.$$

Ebből

$$\frac{\sin \varrho + \sin \varrho_0}{\sin \varrho - \sin \varrho_0} = \frac{\sin m + \sin \delta}{\sin m - \sin \delta}.$$

Innen

$$\operatorname{tng} \frac{\varrho + \varrho_0}{2} \operatorname{cotng} \frac{\varrho - \varrho_0}{2} = \operatorname{tng} \frac{n + \delta}{2} \operatorname{cotng} \frac{m - \delta}{2}.$$

Más elrendezésben és figyelembe véve, hogy

$$\frac{\varrho + \varrho_0}{2} = R, \quad \frac{\varrho - \varrho_0}{2} = \frac{90° - \varphi}{2},$$

$$\frac{\operatorname{tng} R}{\operatorname{tng} \frac{90 - \varphi}{2}} = \frac{\operatorname{tng} \frac{m + \delta}{2}}{\operatorname{tng} \frac{m - \delta}{2}}.$$

Ha ezzel R meg van határozva, úgy

$$\cos\omega = \frac{\operatorname{tng}\delta}{\operatorname{tng}\left(R - \frac{90-\varphi}{2}\right)}.$$

Ezek az óraszögmeghatározásnak új képletei.

E képletek használata a logarithmustáblák alkalmazásával nem nyujt különös előnyt. Nem is a logarithmusos használat végett készültek.

Ellenben lehet használni az R meghatározására a hajózási számtáblázatok közt szereplő *azymuth-táblákat.* Ezek egyike pl. ilyen beosztású

$$\pm B = \frac{10 \operatorname{tng} |b|}{\operatorname{tng} |\beta|} \quad \text{(Nautische Tafeln, Pola. 17.)}$$

Ennek alkalmazására legyen

$$\frac{10 \operatorname{tng} \left|\frac{m+\delta}{2}\right|}{\operatorname{tng} \left|\frac{m-\delta}{2}\right|} = \pm B = \frac{10 \operatorname{tng} |R|}{\operatorname{tng} \left(\frac{90-\varphi}{2}\right)}.$$

A megoldás menete tehát

$b_1 = \frac{m+\delta}{2}$	$B_2 = B_1$	
$\beta_1 = \frac{m-\delta}{2}$	$\beta_2 = \frac{90-\varphi}{2}$	$b_2 = R$ vagy $180° + R$.
$B_1 = ?$	$b_2 = ?$	

Hogy b_2 két értéke közül melyik adja R-et, nem fontos, mert ω meghatározásánál $\operatorname{tng}\left(R - \frac{90-\varphi}{2}\right)$ jön elő.

Például

$m = 20{\cdot}4°$	$b_1 = -7°$	$B_2 = -2{\cdot}3°$
$\delta = -34{\cdot}4°$	$\beta_1 = 27{\cdot}4° = 1^h 49^m$	$\beta_2 = 58{\cdot}4° = 3^h 56^m$
$\varphi = -23{\cdot}9°$	$B_1 = -2{\cdot}3°$	$b_2 = -21° = R$

Innen

$$\varrho_0 = b_2 - \beta_2 = -79{\cdot}4°$$

Most a *speciális óraszögtáblák* közül vesszük azt, melynek jellegét a következő képlet fejezi ki

$$\cos E = \frac{\operatorname{tng} |e|}{\operatorname{tng} |\varepsilon|} \quad \text{(Naut. Tafeln Pola, 21.)}$$

$$|e| < |\varepsilon|,$$

s ha e és ε ellentett jelűek, E helyébe $180 - E$ jön.

Jelen esetben

$$E = \omega, \quad e = \delta, \quad \varepsilon = \varrho_0.$$

Például a fenti feladatnál

$$\delta = -34{\cdot}4°, \quad \varrho_0 = -79{\cdot}4°, \quad \text{s lesz} \quad \omega = 83°.$$

Az azymuth-táblázatok itt való általános alkalmazásának akadálya az, hogy az egyik argumentumnak csak 0°tól 60°-ig való értékeire vannak szerkesztve, a speciális óraszögtábláknak pedig az, hogy az egyik argumentumnak 0°-tól 80°-ig, a másiknak 0°-tól 40°-ig való értékeire vannak szerkesztve, bár bizonyos transzformációval minden lehetőségre kiterjeszthetők (φ helyébe $90 - \delta$, δ helyébe $90 - \varphi$ tételével).

Ellenben, miután a

$$\operatorname{cotng} x = \cos u \operatorname{cotng} v$$

képlet alapján készített Csorba-féle interpolációs *hosszúsági számtáblázat* u-nak 0°-tól 180°-ig, v-nek 0°-tól 90°-ig terjedő értékeire van szerkesztve és használható az

$$-180° < u < +180°$$
$$-90° < v < +90°$$

értékkörben is ama jelszabályok alapján, hogy

$$x \gtreqless 0, \quad \text{amint} \quad v \gtreqless 0$$

és

$$90 - |x| \gtreqless 0, \quad \text{amint} \quad 90 - |u| \gtreqless 0,$$

ez már minden esetben alkalmassá tehető az óraszögmeghatározásra, csak a képleteket kell megfelelően átalakítani.

Az R segédszög meghatározására vonatkozó képlet így írható:

$$\operatorname{cotng} R = \frac{\operatorname{cotng}\left(\frac{m+\delta}{2}\right)}{\operatorname{cotng}\left(\frac{m-\delta}{2}\right)} \operatorname{cotng}\left(\frac{90^\circ-\varphi}{2}\right)$$

Itt

$$-90 < \frac{m+\delta}{2} < +90^\circ$$

$$-90^\circ < \frac{m-\delta}{2} < +90^\circ$$

$$0 < \frac{90^\circ-\varphi}{2} < 90^\circ.$$

Lehet ennélfogva

$$\cos Z = \frac{\operatorname{cotng}\left(\frac{90^\circ-\varphi}{2}\right)}{\operatorname{cotng}\left(\frac{m-\delta}{2}\right)}$$

illetve

$$\operatorname{cotng}\left(\frac{90^\circ-\varphi}{2}\right) = \cos Z \operatorname{cotng}\left(\frac{m-\delta}{2}\right)$$

így

$$\operatorname{cotng} R = \cos Z \operatorname{cotng}\left(\frac{m+\delta}{2}\right).$$

A Z és R számítására e képletek a speciális hosszúsági számtáblázatok alkalmazásával használhatók, ha egyidejűleg

$$\frac{90^\circ-\varphi}{2} \gtrless 0 \quad \text{és} \quad \frac{m-\delta}{2} \gtrless 0.$$

Ámde $\frac{90^\circ-\varphi}{2} > 0$, tehát a feltétel $m-\delta > 0$.

Lehet másodszor

$$\cos Z = \frac{-\operatorname{cotng}\left(\frac{90-\varphi}{2}\right)}{\operatorname{cotng}\left(\frac{m-\delta}{2}\right)}$$

illetve

$$\text{cotng} - \left(\frac{90° - \varphi}{2}\right) = \cos Z \,\text{cotng}\left(\frac{m-\delta}{2}\right)$$

s akkor

$$\text{cotng}\, R = \cos\,(180 - Z)\,\text{cotng}\left(\frac{m+\delta}{2}\right).$$

E képletek Z és R számítására a speciális hosszúsági számtáblázatokkal akkor használhatók, ha egyidejűleg

$$-\left(\frac{90-\varphi}{2}\right) \gtrless 0 \quad \text{és} \quad \frac{m-\delta}{2} \gtrless 0.$$

Ámde $-\left(\frac{90-\varphi}{2}\right) < 0$, tehát a feltétel $m - \delta < 0$. A két eset egyesíthető. A mint $m - \delta \gtrless 0$, a szerint:

$$\text{cotng} \pm \left(\frac{90° - \varphi}{2}\right) = \cos Z \,\text{cotng}\left(\frac{m-\delta}{2}\right),$$

$$\text{cotng}\, R = \cos\,(90° \mp (90° - Z))\,\text{cotng}\left(\frac{m+\delta}{2}\right).$$

Ezek a Z és R meghatározó egyenletei.

Viszont ω meghatározó egyenlete így írható:

$$\text{cotng}\left(R - \frac{90-\varphi}{2}\right) = \cos\omega\,\text{cotng}\,\delta.$$

Az óraszögmeghatározás a táblázatokból való egy kikereséssel és két visszakereséssel ennélfogva a következő *shéma* szerint történik:

A mint $m - \delta \gtrless 0$

	u	v	x	y
1.	$\pm\left(\frac{90-\varphi}{2}\right)$	—	? x_1	$\frac{m-\delta}{2}$
2.	? u_2	—	$90 \mp (90 - x_1)$	$\frac{m+\delta}{2}$
3.	$u_2 - \left(\frac{90-\varphi}{2}\right)$	—	? ω	δ

Példa.

$$\delta = 16{\cdot}7^\circ, \quad \varphi = 41' 5^\circ, \quad m = 10{\cdot}3^\circ$$

$$\frac{m+\delta}{2} = 13{\cdot}5^\circ, \quad \frac{m-\delta}{2} = -3{\cdot}2^\circ, \quad \frac{90-\varphi}{2} = 24{\cdot}25^\circ$$

Itt $m - \delta \gtreqless 0$

	u	v	x	y
1.	$-24{\cdot}25^\circ$	—	? $82{\cdot}8^\circ$	$-3{\cdot}2^\circ$
2.	? $117{\cdot}5^\circ$	—	$97{\cdot}2^\circ$	$13{\cdot}5^\circ$
3.	$93{\cdot}25^\circ$	—	? $90{\cdot}9^\circ$	$16{\cdot}7^\circ$

$$\omega = 90{\cdot}9^\circ$$

E módszerrel és e számtáblázatokkal való óraszögmeghatározás nem hosszabb, mint az általában ismeretes és használt azymuth-meghatározás, sőt még egyszerűbb, mert az utóbbinál három különböző táblázatból való egy-egy kiolvasás szerepel, míg az óraszögmeghatározásra most bevezetett eljárásnál három kiolvasás ugyanazon számtáblázatból.

Összehasonlításul ideiktatunk egy *azymuth-meghatározást.* Ha van a következő három képlet alapján készített három számtáblázatunk:

$$A = \quad 10 \frac{\operatorname{tng} a}{\operatorname{tng} \alpha}$$

$$B = -10 \frac{\operatorname{tng} b}{\operatorname{tng} \beta}$$

$$C = \quad 10 \frac{\operatorname{cotng} c}{\cos \gamma},$$

akkor az azymuthmeghatározás a következő shéma szerint történik:

$a = \delta$	$b = \varphi$	$C = A + B$	
$\alpha = \omega$	$\beta = \omega$	$\gamma = \varphi$	
$A = ?$	$B = ?$	$c = ?$	= azimuth.

Példa.

$\delta = -16{\cdot}5^\circ$, $\varphi = -39{\cdot}3^\circ$, $\omega = -25{\cdot}1^\circ$

$a = -16{\cdot}5^\circ$	$b = -39{\cdot}3^\circ$	$C = -10{\cdot}5^\circ$
$\alpha = -12{\cdot}1^\circ$	$\beta = -25{\cdot}1^\circ$	$\gamma = -39{\cdot}3^\circ$
$A = 7{\cdot}0$	$B = -17{\cdot}5^\circ$	$c = 51^\circ$

$=$ azymuth.

Lásd Nautische Tafeln, Pola: *ABC* Tafeln. 17.

Mindezekből nyilvánvaló, hogy az óraszög meghatározásnak e dolgozatban bevezetett új módszere érdemes rá, hogy a gyakorlatba bevezettessék, akár a Csorba-féle hosszúsági táblázatok használatával, akár a hajózási számtáblázatok közt szereplő azymuth-táblák kiegészítésével s a speciális óraszögtáblák (a látókörben, az első vertikálisban, a legnagyobb digresszióban) bizonyos átalakításával.

Viszont a Csorba-féle szélességi és hosszúsági táblázatok jelentősége e módszer bevezetésével nagy mértékben emelkedett, mert azon előnyön kívül, hogy az interpolációhoz való szám sorokkal vannak ellátva, most már azokkal (különösen az argumentumoknak fokonkénti értékeire való kibővítés után) az összes lényegesen különböző hely és időmeghatározási csillagászati feladatok megoldása, ú. m. a láthatósági adatok (azymuth, magasság), az identifikálási adatok (óraszög, declinatió), a földrajzi szélesség, végre az óraszög meghatározása elvégezhető.

Még nagyobb a dolog jelentősége a *grafikai interpolációra* berendezett Csorba-féle koordinátahálózat rendszereknél, mert most már ezekkel ugyancsak az összes feladatok kényelmesen és *gyorsan* megoldhatók. Eddig ugyanis a négy alapfeladat egyike, az óraszögmeghatározás, csak egy átlátszólapra rajzolt hálózatrendszernek a rendes hálózatvonalakra való ráhelyezésével és kellő helyzetbe forgatásával volt megoldható, ami nagyobb méretnél (egyfokos vagy húszperces hálózat) bajosan volt eszközölhető.

Most már a készülék, mely kiadás előtt áll, egyszerű berendezéssel és a grafikai interpoláció kényelmes eljárásával bármely csillagászati és földrajzi idő és helyzetadatnak tizedfokig vagy kétpercig való gyors meghatározását, bármely gömbháromszögtani problémának grafikai interpolációs megoldását lehetővé teszi és alkalmasnak látszik rá, hogy a gyakorlati használatba — ú. m. csillagászat, pædagogia, szárazföldi és tengerhajózási tájékozódás — bevezettessék. Használatának körét bővíti az is, hogy a tervezett rádiós helymeghatározások szintén gömbháromszögtani problémák.

Miskolc, 1925. okt. 15. *Csorba György.*

NEUE METHODE ZUR BESTIMMUNG DES STUNDENWINKELS.

Die Bestimmung des Stundenwinkels aus der Deklination, aus der geographischen Breite und aus der Höhe ist in der Astronomie bisher durch einargumentige Zahlentafeln, und zwar grösstenteils durch Logaritmentafeln geschehen. Dieses Verfahren ist sehr langwierig, denn es benötigt mindestens fünf Auslesungen. Als Grundlage diente die Formel

$$\operatorname{tng}\frac{\omega}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(z-\varphi+\delta)\sin\frac{1}{2}(z+\varphi-\delta)}{\cos\frac{1}{2}(z+\varphi+\delta)\cos\frac{1}{2}(\varphi+\delta+z)}},\quad z=90^\circ-m$$

oder die Formel

$$2\sin^2\frac{\omega}{2}=\frac{\cos(\varphi-\omega)-\sin m}{\cos\varphi\cos\delta}.$$

Viel einfacher geschieht die Bestimmung der horizontalen Koordinaten in der nautischen Astronomie, zum Beispiel die Bestimmung des Azymuth durch die zweiargumentigen Azymuthtafeln, wo nur drei Auslesungen nötig sind.

Diese Bestimmung gründet sich auf die Formel

$$\frac{\operatorname{cotng} a}{\cos\varphi}=-\frac{\operatorname{tng}\varphi}{\operatorname{tng}\omega}+\frac{\operatorname{tng}\delta}{\sin\omega}.$$

Die gegenwärtige Arbeit gibt neue Formeln, durch welche die Bestimmung der Stundenwinkel durch drei Tafelauslesungen durchgeführt werden kann. Zu diesem Zwecke kann man die Azymuthtafeln oder die auf dem Horizont oder auf dem ersten Vertikal sich beziehenden speziellen Stundenwinkeltafeln oder die Zahlentafeln des Verfassers, welche mit Korrektions-Zahlenreihen versehen sind, benützen. Die letzten werden dadurch zur Auflösung vieler astronomischen Aufgaben anwendbar sein. Man kann dadurch ebenso die, auf graphische Interpolation geordnete Koordinatennetze des Verfassers, zur Auflösung aller Aufgaben anwenden.

Die fragliche Formel kann man so herstellen. Stellen wir einen Perpendikelkreis durch den Stern auf den Meridian, und es sei die Distanz des Fusspunktes vom Zenit $90°-\rho$, die Distanz von dem Pole $90°-\rho_0$, so wird

$$\rho-\rho_0=90°-\varphi, \qquad \frac{\sin\rho}{\sin\rho_0}=\frac{\sin m}{\sin\delta}$$

$$\cos\omega=\operatorname{tng}\delta\operatorname{cotng}\rho_0, \qquad \cos a=\operatorname{tng} m\operatorname{cotng}\rho.$$

Aus diesen

$$\frac{\operatorname{tng}\frac{\rho+\rho_0}{2}}{\operatorname{tng}\frac{\rho-\rho_0}{2}}=\frac{\operatorname{tng}\frac{m+\delta}{2}}{\operatorname{tng}\frac{m-\delta}{2}}.$$

Wenn $R=\frac{\rho+\rho_0}{2}$ ist, so wird $\rho=R+\frac{90°-\varphi}{2}$,

$$\rho_0=R-\frac{90°+\varphi_0}{2}, \qquad \frac{\operatorname{tng} R}{\operatorname{tng}\frac{90°-\varphi}{2}}=\frac{\operatorname{tgn}\frac{m+\delta}{2}}{\operatorname{tng}\frac{m-\delta}{2}}$$

$$\cos\omega=\frac{\operatorname{tng}\delta}{\operatorname{tng}\left(R-\frac{90°-\varphi}{2}\right)}, \qquad \cos a=\frac{\operatorname{tng} m}{\operatorname{tng}\left(R+\frac{90°+\varphi}{2}\right)}.$$

Dies sind die neuen Formeln zur Bestimmung des Stundenwinkels (und des Azymuth). Zur Anwendung der zweiargumentigen Zahlentafeln ist noch die Substitution

$$\frac{\operatorname{tng}\left(\frac{m+\delta}{2}\right)}{\operatorname{tng}\left(\frac{m-\delta}{2}\right)}=B, \quad \text{oder} \quad \frac{\operatorname{tng}\left(\frac{m-\delta}{2}\right)}{\operatorname{tng}\pm\left(\frac{90-\varphi}{2}\right)}=\cos x$$

notwendig.

Georg Csorba.

A SZÍNKÉPVONALAK MULTIPLETTSTRUKTÚRÁJA ÉS A ZEEMAN-EFFEKTUSOK.

Már jóval a kvantumelmélet előtt felismerték azt a törvényszerűséget, hogy különösen a hydrogén, az alkáliák, az alkáliföldek stb. spektrumában található vonalak rezgésszámát (ν) előállíthatjuk, mint bizonyos számok különbségét:

$$\nu_{(i)\,k} = A_i - A_k$$

még pedig úgy, hogy ezen *A tagok* («Terme») száma lényegesen kevesebb, mint a belőlük előállítható színképvonalak. Ha A_i-nek ugyanazon tagot választjuk, mialatt A_k befutja a tagok bizonyos sorozatát, úgy a spektrumból egy összetartozó vonalsorozatot nyertünk, melyet *szériesnek* nevezünk. Az A_k *változó tagok* sorozata monoton csökken és $A_\infty = 0$. Ez azt jelenti, hogy a széries vonalai egy *határ* felé konvergálnak és a széries határa: $\nu_{(i)\,\infty} = A_i$. A széries állandó tagját A_it *alaptagnak* nevezzük.

A hydrogénspektrum Balmer-szériesét a

$$\nu = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right) \qquad (n = 3, 4, 5, \ldots)$$

formula állítja elő, hol

$$R = \frac{2\pi^2 \mu e^4}{h^3}$$

a Rydberg-szám, mely atomi konstansokból számítható ki ($\mu =$ az elektron tömege, $e =$ az elektron töltése, $h =$ a Planck-féle konstans). Amint látjuk, a Balmer-szériesnél $\frac{R}{2^2}$ az alaptag és $\frac{R}{n^2}$ a változó tag.

A BALMER-formulát a BOHR-féle elmélet[1] alapján a következő alapelvek alkalmazásával vezethetjük le:

I. Az atom stacionárius állapotait a *kvantumfeltételek* szabják meg; e kvantumfeltételek szerint, ha egy mechanikai rendszer impulzusmomentuma állandó, akkor ezen impulzusmomentum (és ennek bármely állandó komponense) csakis $\frac{h}{2\pi}$ egész számú többszöröse lehet.

II. Két stacionárius állapot közti átmenet alkalmával keletkező sugárzás rezgésszámát a *frekvenciafeltétel*:

$$\nu = \frac{W_1 - W_2}{h}$$

adja meg, melyben W_1 a kezdeti állapot, W_2 a végállapot energiáját jelenti. Az energiát atomi konstansokkal és a kvantumfeltételekben szereplő egész számokkal, a *kvantumszámokkal* fejezzük ki.

A hydrogénatom elektronjára az atommag a COULOMB-féle erővel hat, tehát itt a jólismert egytestproblémával van dolgunk. Az elektron ellipszis vagy körpályán mozog állandó impulzusmomentummal:

$$mr^2\omega = \text{const.}$$

(r = az elektron távolsága az atommagtól, ω = az elektron szögsebessége). A kvantumfeltételek szerint

$$mr^2\omega = \frac{h}{2\pi} k,$$

ahol k egész szám az ú. n. *azimutális kvantumszám*. Körpálya esetén az azimutális kvantumfeltétel már megadja a stacionárius pályák diszkrét sorozatát. Ellipszispályánál a stacionárius pályák kiválasztásához még az úgynevezett radiális kvantumfelté-

[1] L. magyar nyelven POGÁNY BÉLA «A fény» című könyvét, melyben a BOHR-féle hydrogén-modell tárgyalása található, továbbá ORTVAY RUDOLF cikkét a «Stella» Csillagászati Egyesület 1926. évi Almanachjában: Törvényszerűségek az elemek spektrumaiban.

tel [1] is szükséges. Az energia kifejezésében a k azimutális és a n' radiális kvantumszámok összege:

$$n = k + n'$$

lép fel; n-et *főkvantumszámnak* nevezzük. A «kvantált» energia:

$$W(n) = -\frac{2\pi^2\mu e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2};$$

ebből pl. a Balmer-formula a következőképen adódik:

$$\nu = \frac{W(n) - W(2)}{h} = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

E szerint az n-edik szériestag, előjeltől eltekintve nem egyéb, mint az energia osztva h-val.

A $W(1)$, $W(2)$,... $W(n)$, energiaértékekre a frekvenciafeltételt alkalmazva megkapjuk a hydrogénspektrum többi szériesét is, így az ultraibolyában levő Lyman-szériest

$$\nu = \frac{W(n) - W(1)}{h} = R\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \quad (n=2, 3, 4, \ldots)$$

továbbá az ultravörös Paschen-szériest

$$\nu = \frac{W(n) - W(3)}{h} = R\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{n^2}\right). \quad (n=4, 5, \ldots)$$

Ha a Lyman-szériés első vonalához hozzáadjuk a Balmer-szériés első vonalát, megkapjuk a Lyman-szériés második vonalát:

$$R\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = R\left(1 - \frac{1}{3^2}\right).$$

Még számtalan ilyen relációt állíthatunk fel, melyek szerint két színképvonal rezgésszámának összege vagy különbsége

---

[1] A radiális kvantumfeltétel a radiális impulzusra vonatkozik:

$$\int m \frac{dr}{dt} dr = n'h.$$

Az integrál a Kepler-mozgás periódusára terjesztendő ki.

megadja egy harmadik vonal rezgésszámát. Ez a RITZ-féle *kombinációs elv* közvetlen folyománya annak a ténynek, hogy a szériesekbe sorolt vonalak frekvenciái, mint a tagok különbségei állíthatók elő. Nevezetesek még a következő kombinációk: a LYMAN-széries határának (R) és a BALMER-széries határának $\left(\frac{R}{4}\right)$ különbsége egyenlő a LYMAN-széries első vonalának rezgésszámával $\left(R-\frac{R}{2^2}\right)$; a LYMAN-széries és PASCHEN-széries határának különbsége megadja a LYMAN-széries második vonalát $\left(R-\frac{R}{3^2}\right)$ stb.

Az alkáliáknál és alkáliföldeknél a tagok sorozatát általában $\frac{R}{(n+a)^2}$ alakú formulák adják meg, melyekben az n egész szám mellett az illető szériesre jellemző a korrekció is fellép; a értéke általában n-től is függ, mégpedig n növekedésével csökken. Ilyen szériesformulák felállításával a kvantumelmélet előtt különösen RYDBERG és RITZ foglalkoztak.

1. A normális Zeeman-effektus.

A hydrogénvonalak mágneses térben való felbomlását úgy a klasszikus elektrodinamika, mint a kvantumelmélet alapján könnyen megmagyarázhatjuk a LARMOR-féle tétel segítségével. E tétel szerint a külső mágneses tér csak annyiban befolyásolja az elektron mozgását, hogy a mágneses tér jelenléte nélkül végbemenő mozgáshoz egy egyenletes *precesszió* járul $o=\frac{eH}{2\mu c}$ szögsebességgel ($e=$ az elektron töltése, $\mu=$ tömege, $c=$ fénysebesség, $H=$ térintenzitás) a koordinátarendszer kezdőpontján (tehát az atommagon, illetőleg az atommag és elektron-súlypontján) átmenő mágneses erővonal iránya körül. Rögtön megjegyezzük, hogy ez a tétel csak akkor érvényes, ha a LARMOR-precesszió által előidézett sebességnövekedés kicsiny az eredeti sebességhez képest és ha az elektronra ható többi erőtér az említett tengelyre szimmetrikus (mint pl. a COULOMB-féle erő).

A LARMOR-tétel levezetése céljából tekintsük egy elektron mozgását (pl. egy BOHR-féle ellipszispályán) és képzeljük, hogy az alapul választott koordinátarendszer (melyben tehát az elektron BOHR-féle ellipszisen mozog) az inercia-rendszerhez képest egyenletes precessziót végez valamilyen o szögsebességgel. Az így előálló mozgás fenntartásához oly külső erő szükséges, mely a forgó rendszerben fellépő centrifugális és CORIOLIS-féle erőt ellensúlyozza. A centrifugális erő:

$$\mu \varrho o^2,$$

hol ϱ az elektron távolsága a forgástengelytől; a CORIOLIS-erőt a

$$2\mu\,[vo]$$

vektorszorzat állítja elő, ha v-vel az elektronnak a forgó rendszerbeli sebességét jelöljük. Tegyük fel, hogy a precesszió által létrehozott sebességnövekedés, melynek értéke $[\varrho o]$, igen kicsiny v-hez képest; ekkor a centrifugális erő elhanyagolható a CORIOLIS-erő mellett.

A H intenzitású mágneses tér az elektronra

$$-\frac{e}{c}\,[vH]$$

erővel hat. Ez az erő éppen lerontja a CORIOLIS-féle erőt, ha o és H iránya megegyezik és $2\mu o = \frac{e}{c} H$, azaz $o = \frac{eH}{2\mu c}$. Ezzel a LARMOR-tételt igazoltuk.

A klasszikus elektrodinamika szerint az elektron mozgásának harmonikus komponensei[1] közvetlenül megadják a kibocsátott spektrum frekvenciáit, a polarizációs állapotot és az intenzitásbeli viszonyokat. A LARMOR-precesszió a mágneses erővonalak irányába eső harmonikus komponenseket nem befolyásolja, tehát ezen komponensek rezgésszáma változatlan marad,

[1] A KEPLER-pályán mozgó elektron derékszögű koordinátáit, mint az idő függvényét, FOURIER-sorokkal állíthatjuk elő. E FOURIER-sorok tagjait nevezzük harmonikus komponenseknek.

míg a mágneses erővonalak irányára merőleges síkba eső komponensek rezgésszámai $\pm \frac{o}{2\pi} = \pm \frac{eH}{4\pi\mu c}$ értékkel változnak meg. A merőleges komponensek közelebbi diszkussziója azt mutatja, hogy a felső előjelhez tartozó, tehát nagyobb rezgésszámú cirkuláris komponens forgási iránya ugyanaz, mint a LARMOR-precesszióé, a kisebb rezgésszámú cirkuláris komponens forgása ellenkező irányú. Így a normális ZEEMAN-effektus jól ismert törvényszerűségei a klasszikus elektrodinamika alapján teljes magyarázatot nyertek. A normális ZEEMAN-effektus elektronelmélete, melyet itt leegyszerűsítve vázoltunk, LORENTZ-től származik.

A ZEEMAN-effektus kvantumelmélete szintén a LARMOR-féle tételhez kapcsolódik. Az elektron kinetikai energiája mágneses tér nélkül

$$E_{\text{kin}} = \frac{\mu v^2}{2} = \frac{\mu}{2}(\dot{z}^2 + \dot{\varrho}^2 + \varrho^2\dot{\varphi}^2),$$

hol z, ϱ, φ hengerkoordinátákat jelentenek. A z-tengely átmegy atommagon és párhuzamos a külső mágneses tér irányával, $\varrho =$ a z-tengelytől mért távolság, $\varphi =$ azimut a z-tengelyre merőleges síkban. A LARMOR-precesszió $\dot{\varphi}$-t o-val növeli. Tehát kinetikai energia növekedése:

$$\varDelta E_{\text{kin}} = \mu\varrho^2\dot{\varphi}o + \frac{\mu}{2}\varrho^2 o^2.$$

Ez lesz egyúttal az egész energia változása, mivel feltettük, hogy az elektronra ható erőtér szimmetrikus a z-tengelyre, tehát a potenciális energia a LARMOR-precesszió hatására nem változik. Fentebb azt is kikötöttük, hogy a LARMOR-precesszió által előidézett sebességváltozás $(= \varrho o)$ az eredeti sebességhez $(= \varrho\dot{\varphi})$ képest kicsiny. Így az energia mágneses térben

$$\varDelta W = \mu\varrho^2\dot{\varphi}.o$$

értékkel különbözik a mágneses tér nélküli energiától; $\mu\varrho^2\dot{\varphi}$ nem egyéb, mint az elektron impulzusmomentumának a mágneses erővonalak irányába eső vetülete. Tehát

$$\Delta W = I_H \frac{eH}{2\mu c}, \tag{1}$$

hol $I_H = I \cos(IH)$ az elektron impulzusmomentumának I-nek H-ra való vetülete.

Mint láttuk, az állandó impulzusmomentumra az

$$I = \frac{h}{2\pi} k \tag{2}$$

kvantumfeltétel érvényes; k az ú. n. *azimutális kvantumszám.*[1] Ez a kvantumfeltétel az I_H értékét még határozatlanul hagyja, hiszen $\cos(IH)$-ra nem jelent semmiféle megszorítást. A kvantumelmélet alapelveinek következetes alkalmazásával az I_H állandó momentumkomponensre a következő kvantumfeltételt állítjuk fel:

$$I_H = \frac{h}{2\pi} m. \tag{3}$$

m-t *mágneses kvantumszámnak* nevezzük.

Ezzel már az impulzusmomentum irányítását is[2] alávetettük a kvantumfeltételeknek, mivel (2) és (3) szerint

$$\cos(IH) = \frac{m}{k}.$$

Innen következik:

$$-k \leqq m \leqq k,$$

---

[1] Az azimutális kvantumszám a hydrogénatom energiájában (külső erő nélkül) csak a relativisztikus korrekciós tagokban fordul elő explicite. A BALMER-féle formulában előforduló főkvantumszám a k azimutális kvantumszám és a radiális kvantumszám (mely a radiális kvantumfeltételből származik) összege.

[2] STERN és GERLACH az atómsugaraknak (vagyis néhány 100 méteres sebességgel haladó atomoknak) erős inhomogén mágneses térben való eltérítését vizsgálták és azt tapasztalták, hogy a sugarak szóródása nem folytonos, hanem csak egyes diszkrét irányokban lehetséges az eltérítés. Ez a nevezetes kísérlet közvetlen igazolása annak, hogy az atom impulzusmomentuma csupán a $\cos(IH) = \frac{m}{k}$ feltétellel megszabott irányokban helyezkedhetik el a külső mágneses térben. (Richtungsquantelung.)

vagyis m összesen $2k+1$ különböző értéket vehet fel. Az I_H kvantált értékét (1)-be helyettesítve:

$$\Delta W = \frac{eH}{4\pi\mu c} \cdot h \cdot m,$$

ahonnan a frekvenciafeltétel alkalmazásával megkapjuk a színképvonalak felbomlását külső mágneses tér hatására:

$$\Delta\nu = \frac{eH}{4\pi\mu c}(m_1 - m_2), \tag{4}$$

hol m_1 és m_2 két stacionárius állapothoz tartozó értékei a mágneses kvantumszámnak.

A $\Delta\nu$-nek a klasszikus elmélet által megadott értékeit megkapjuk, ha (4)-be $m_1 - m_2 = 0, \pm 1$ értékeket tesszük. A klasszikus elméletből még az is következik, hogy a $\Delta\nu = 0$ vonal a mágneses erővonalak irányával párhuzamosan polarizált, a $\Delta\nu = \pm \frac{eH}{4\pi\mu c}$ vonalak pedig (transzverzális megfigyelésnél) merőlegesen polarizáltak. A kvantumelmélet eddig említett elvei csupán a stacionárius állapotok meghatározására és az emittált fény frekvenciájára vonatkoznak, de semminemű felvilágositást nem adnak a polarizációról és az egyes stacionárius állapotok közti átmenetek valószínűségéről, vagyis az intenzitásról. Ezt a hézagot a *korrespondencia elve* tölti ki, mely minden kvantumelméleti frekvenciához egy klasszikus frekvenciát, illetőleg egy harmonikus komponenst rendel hozzá az elektron derékszögű koordinátáinak Fourier-sorából.[1]

A korrespondencia-elvből tényleg következik a mágneses kvantumszámnak a tapasztalattal egybehangzó *kiválasztási elve*:

[1] A korrespondencia-elv tárgyalására lásd pl.: Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien; Born, Vorlesungen über Atommechanik. Itt csak megemlitjük a korrespondencia-elvből levezetett *kiválasztási elveket* (Auswahlprinzip), melyek a kvantumszámoknak a kvantumátmeneteknél való ugrásaira vonatkoznak. — Az intenzitásbeli viszonyok tárgyalását l. Ortvay idézett cikkében, Stella-Almanach 1926.

$$m \begin{matrix} \nearrow m+1 \\ \rightarrow m \\ \searrow m-1 \end{matrix}$$

mégpedig az $m \rightarrow m$ átmenetnek a mágneses erővonalakkal párhuzamos polarizáció, az $m \rightarrow m \pm 1$ átmeneteknek merőleges polarizáció felel meg.

A főkvantumszám ugrását a korrespondencia-elv nem korlátozza; ellenben az azimutális kvantumszámra a $k \begin{matrix} \nearrow k+1 \\ \searrow k-1 \end{matrix}$ kiválasztási elv érvényes, tehát általában az azimutális kvantumszám csak ± 1-el változhatik meg.

2. Az alkáliák spektruma.

A nátrium kettős D-vonala első tagja a nátrium ú. n. fősériesének, melynek többi vonalai is dublettet alkotnak, csakhogy a magasabb frekvenciák felé a dublett két tagja közti távolság elenyészik. Az alkáliáknál (lithium, nátrium, kálium, rubidium, cæsium; bizonyos tekintetben ide tartoznak: réz, ezüst és arany) általában kettős és hármas vonalakból álló spektrumokat találunk. A szériestagok, melyeknek különbségei az alkálivonalak rezgésszámait adják, Rydberg és Ritz szerint $\frac{R}{(n+a)^2}$ alakúak, hol R a Rydberg-féle számot jelenti és n egész szám; az egyes szériesekre jellemző az a korrekció. A fősériesen kívül az I. és II. mellékszéries és Bergmann-széries a nevezetesebbek. E szériesek változó tagjait úgy jelöljük, hogy a sorszám[1] után a szériest jelölő betűt írjuk:

főszéries (Hauptserie = HS) . . . . np
I. mellékszeries (I. Nebenserie = I. N. S.) . . nd
II. mellékszéries (II. N. S.) . . . . ns
Bergmann-széries (B. S.) . . . . nf

---

[1] A sorszám szoros kapcsolatban van a főkvantumszámmal, melytől csak normirozásban tér el.

Maguk a szériesek a következő kombinációkból keletkeznek:

H. S. ...	$\nu = 1s - np$	$(n = 2, 3, \ldots)$
I. N. S. ...	$\nu = 2p - nd$	$(d = 3, 4, \ldots)$
II. N. S. ...	$\nu = 2p - ns$	$(s = 2, 3, \ldots)$
B. S. ...	$\nu = 3d - nf$	$(n = 4, 5, \ldots)$

Ezeken kívül vannak még magasabb sorszámú alaptaggal (pl.: $2s$, $3p$) bíró fő- és mellékszériesek.

Írjuk a szérieseket jellemző betűket a következő sorrendbe:

$$s, p, d, f, \ldots$$

Látható, hogy a H. S., I. és II. N. S., B. S. úgy keletkeznek, hogy a felirt sorban mindig két szomszédos tag különbségét képezzük (pl.: s és p, p és d stb.). Ez a kiválasztási szabály nagyon emlékeztet az azimutális kvantumszámra vonatkozó kiválasztási elvre, mely szerint k csak $\pm$ 1-el változhatik kvantumátmeneteknél. Már ez a körülmény is arra utal, hogy az s-, p-, d-... szérieseknek különböző azimutális kvantumszámokat tulajdonítsunk, még pedig úgy, hogy a fenti sorrendben a szériestagokhoz rendelt azimutális kvantumszám balról jobbra haladva 1-el növekedjék. Így még ugyan határozatlan marad a k kezdeti értéke és tényleg többféle normirozás használatos az irodalomban. Gyakran használt normirozás a következő:

s tagoknál $k = 1$,
p « $k = 2$,
d « $k = 3$, stb.

Mivel k-ra általában a $k \rightarrow k \pm 1$ kiválasztási elv érvényes, tényleg azt kapjuk, hogy csak szomszédos tagok kombinálódhatnak.

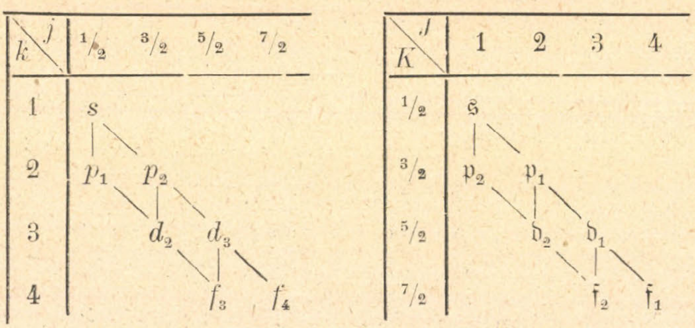
Említettük, hogy az alkáliák főszériese kettős vonalakból áll. Szintén dublettvonalak alkotják a II. mellékszériest. Az I. mellékszériesben hármas vonalakat találunk.[1]

---

[1] A II. mellékszériest régebben «scharfe Nebenserie»-nek nevezték; innen a széries változó tagját jelölő s betű. A p, d és f betűk a «Prinzipal-

A vonalak eme kettős és hármas szerkezetét a tagok kettősségével magyarázzuk. Még pedig az *s*-tagok egyszeresek, a *p*, *d* stb. tagok ellenben kettősek. Ebből rögtön következik, hogy az alkáliák főszériese és II. mellékszériese szigorúan kettős vonalakból áll; ez a dublicitás a kettős *p*-tagoktól származik. A többi szériesek, melyekben *s*-tagok nem szerepelnek (ilyen pl. az I. mellékszéries), a tapasztalat szerint legfeljebb hármas vonalakból állnak. E körülmény folytán egy újabb kiválasztási elv felállítására kell törekednünk, hiszen pl. egy *p*- és egy *d*-dublett között minden megszorítás nélkül négyféle kombináció volna lehetséges. A dublettek mindkét tagjához külön-külön egy új kvantumszámot rendelünk: a *belső kvantumszámot*, melyet *j*-vel jelölünk. Amint az azimutális kvantumszámnál, úgy a belső kvantumszámnál sem egységes a normirozás. Az alábbi két schema a SOMMERFELD-féle és a LANDÉ-féle jelöléseket állítja szembe. A már itt is fellépő félkvantumszámok szerepéről később bővebben lesz szó.

(SOMMERFELD) (LANDÉ)



Az összekötő vonalak azt mutatják, hogy a tapasztalat szerint milyen kombinációk lehetségesek. Mint a schemából könnyen leolvasható, az azimutális kvantumszámra vonatkozó $k \rightarrow k \pm 1$

---

serie» (főszéries), «diffuse Nebenserie» (I. mellékszéries, melynél a multiplicitás gyakran elmosódik) és a «Fundamentalserie» (BERGMANN-széries) elnevezésekből származnak.

feltétel mellett fennáll egy kiválasztási elv a belső kvantumszámra is:

$$j \to \begin{cases} j+1 \\ j \\ j-1 \end{cases}$$

Példaképpen felemlítjük, hogy a nátrium D-vonalai közül a nagyobb hullámhosszúságú D_1-vonal az $1s - 2p_1$ kombinációból származik, míg a kisebb hullámhosszúságú D_2-vonal rezgésszáma: $1s - 2p_2$. E szerint $p_1 > p_2$. Általában egy multiplett tagjainak értéke (mely ellenkező előjellel véve és h-val szorozva megadja az energiát) a belső kvantumszám növekedésével csökken. Gyakran előfordul azonban az ellenkező eset, midőn tehát a belső kvantumszámmal a tagérték is növekszik («verkehrte Terme»).

3. Az alkáliák Zeeman-effektusa.

Az alkálispektrumok gyenge mágneses térben nem a normális Lorentz-triplettet, hanem *anomális* Zeeman-*felbontást* mutatnak.

A D_1-vonal (és vele együtt minden (s, p_1) kombináció) négy Zeeman-komponensre bomlik fel, melyek közül kettő párhuzamosan, kettő merőlegesen polarizált.[1] A két π-komponens a D_1-vonal eredeti helyétől $\pm \frac{2}{3} \Delta\nu_{\text{norm}}$ távolságra van, ha $\Delta\nu_{\text{norm}} = \frac{eH}{4\pi\mu c}$ a normális Zeeman-felbontás szélességét jelöli; a két σ-komponens távolsága $\pm \frac{4}{3} \Delta\nu_{\text{norm}}$. Tehát a D_1-vonal felbontása $\Delta\nu_{\text{norm}}$ mértékegységében kifejezve: $\pm \frac{(2), 4}{3}$; e jelölésnél a π-komponenseket zárójellel különböztetjük meg a σ-komponensektől. A D_2-vonal felbontása két π és négy σ vonalból áll: $\pm \frac{(1), 3, 5}{3}$. A térnélküli vonalak helyén tehát nincsen Zeeman-komponens.

---

[1] A párhuzamos komponenseket π-vel, a merőlegeseket σ-val szokás jelölni.

Az anomális ZEEMANN-effektusokra gyenge tereknél egész általánosan[1] érvényes a következő két törvény:

1. A PRESTON-féle szabály azt mondja ki, hogy a felbontás független a kombináló tagok sorszámától és csakis a k és j kvantumszámoktól függ (tehát pl. $1s - 2p_1$, $1s - 3p_1, \ldots 1s - np_1$-nél ugyanaz, függetlenül n-től).

2. A RUNGE-féle szabály szerint az anomális komponensek távolsága a térnélküli vonal helyétől mindig *racionális többszöröse* $\Delta\nu_{norm}$-nak.

A D-típusú anomális ZEEMAN-effektusok elméletét a klasszikus elektrodinamika alapján W. VOIGT állította fel. A VOIGT által levezetett formula nemcsak a gyenge tereknél előálló felbontást adja meg, hanem nyomon követi a felbontás átalakulását erősebb mágneses tereknél egészen a PASCHEN—BACK-effektusig.

Ami az anomális ZEEMAN-effektusok kvantumelméletét illeti, elsősorban az a kérdés merül fel, miként lehetne a ZEEMAN-vonalak rezgésszámát mint bizonyos tagoknak a különbségét előállítani. Nyilvánvaló, hogy itt a normális ZEEMAN-effektus tárgyalásánál használt modell felmondja a szolgálatot, hiszen az anomális felbontások a $\Delta\nu_{norm}$ törtrészeiből épülnek fel. Egyelőre meg kell elégednünk azzal, hogy meghatározzuk a «ZEEMAN-tagokat» (ill. az ezeknek megfelelő energianivókat), amelyek kombinálásából a ZEEMAN-vonalak keletkeznek.

A normális ZEEMAN-effektus kvantumelméleténél bevezettük a mágneses kvantumszámot, melyre az $m \rightarrow m$, $m \pm 1$ kiválasztási szabály érvényes. Hasonlóképpen minden anomális ZEEMAN-taghoz egy mágneses kvantumszámot rendelünk, mely azonban nem lehet mindig egész szám, hanem az alkálitagoknál és általában páros multipletteknél $\frac{1}{2}$-nek páratlan többszöröse, míg a

---

[1] Az ú. n. *elsőfajú* multiplettekre, melyek e cikk tárgyát képezik. A *másodfajú* multiplettek («Multipletts zweiter Stufe» ; pl.: neonspektrum) ZEEMAN-effektusára e szabályok már csak bizonyos módosítással és megszorítással érvényesek.

páratlan multipletteknél (pl. az alkáli-földfémek esetében) egész szám lesz.

Az anomális ZEEMAN-tagokat $mg\,\Delta\nu_{\text{norm}}$ alakban írjuk. A racionális g-faktor értéke a szériestagok fajtája szerint más és más. Éppen ezért komplikáltabb vonalkomplexumot kapunk, mint a normális LORENTZ-triplettnél, amelynél mg egész szám.

A D-típusú ZEEMAN-effektusok példáján könnyen illusztrálhatjuk a «taganalízis» eljárását, melynek segítségével a g-faktorokat az empirikus adatokból kiszámíthatjuk. A mágneses kvantumszámra vonatkozó kiválasztási elvet a következőkben is érvényesnek tekintjük, tehát az $m \rightarrow m$ kombináció π-komponenseket, az $m \rightarrow m \pm 1$ kombináció σ-komponenseket eredményez. Hogy a D-típusú felbontásoknál a mágneses kvantumszám (a zérust is beleértve) nem lehet egész szám, az onnan következik, hogy ezek a ZEEMAN-típusok páros számú vonalat tartalmaznak, már pedig a mágneses kvantumszám kiválasztási elvének figyelembevételével könnyen belátható, hogy páros számú vonalból álló felbontás csakis páros számú ZEEMAN-tagok kombinálásából keletkezhetik. De a ZEEMAN-tagok száma páratlan lenne egész számú m-ek esetében, mint a normális ZEEMAN-effektusnál ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$). E helyett dubletteknél és általában páros multipletteknél $m = \pm {}^1/_2, \pm {}^3/_2, \pm {}^5/_2, \cdots$ lesz.

A D-vonalak felbontásából az alábbi schemák segítségével számíthatjuk ki a g-faktorokat:

	m	$-{}^1/_2$	${}^1/_2$
(D_1)	mg_s	$-\frac{1}{2}g_s$	$\frac{1}{2}g_s$
	mg_{p_1}	$-\frac{1}{2}g_{p_1}$	$\frac{1}{2}g_{p_1}$
	π	$-{}^2/_3$	${}^2/_3$
	σ	$-{}^4/_3$	${}^4/_3$

Innen:

$\frac{1}{2} g_s - \frac{1}{2} g_{p_1} = {}^2/_3$, $\frac{1}{2} g_s + \frac{1}{2} g_{p_1} = {}^4/_3$, tehát $g_s = 2$, $g_{p_1} = {}^2/_3$.

(D_2)

m	$-{}^3/_2$	$-{}^1/_2$	${}^1/_2$	${}^3/_2$
mg_s		-1	1	
mg_{p_2}	$-\frac{3}{2} g_{p_2}$	$-\frac{1}{2} g_{p_2}$	$\frac{1}{2} g_{p_2}$	$\frac{3}{2} g_{p_2}$
π		$-{}^1/_3$	${}^1/_3$	
σ	$-{}^5/_3$	-1	1	${}^5/_3$

Innen $g_{p_2} = {}^4/_3$. Hasonló eljárással kiszámíthatjuk a tapasztalt felbontásokból a többi dublettagok g-faktorait:

	s	p_1	p_2	d_2	d_3	f_3	f_4
$g =$	2	${}^2/_3$	${}^4/_3$	${}^4/_5$	${}^6/_5$	${}^6/_7$	${}^8/_7$

4. A multiplettek rendszere.

Amint láttuk, az alkáliák, melyek a periodikus rendszer első oszlopában foglalnak helyet, dublettrendszerű spektrumot mutatnak. A periodikus rendszer második oszlopában levő alkáliföldfémek (beryllium, magnézium, kálcium, stroncium, kadmium, higany stb.) spektruma szingulett és triplettrendszerből épül fel. Még Rydberg állította fel azt a szabályt, mely szerint a dublett- és triplettrendszerek szabályosan váltakoznak a periodikus rendszerben, még pedig úgy, hogy a páratlan vegyértékű elemeknél dublettek, a páros vegyértékűeknél triplettek lépnek fel. Ez a Rydberg-féle *váltakozási törvény* («Wechselsatz») csupán kezdetleges kifejezése egy alapvető atomi törvényszerűségnek, mely egész általánosságban a páros és páratlan multiplettek váltakozására vonatkozik. Ugyanez a váltakozás érvényes az ív- és szikraspektrumok karakterére. Így az alkáli-földfémek első szikraspektruma dublettrendszerű, mint az alkáliáké; a földfémek (pl. aluminium) ívspektruma dublett és kvartettrendszerű, első szikraspektruma szingulett-triplett, második szikraspektruma (mely kétszeres ionizáció esetén áll elő) pedig alkáliszerű. A különbség csak az, hogy a szikraspektrumok vonalai rövidebb hullámhosszúságúak. Így a következő spektrumok: *Na* I, *Mg* II, *Al* III, *Si* IV [1] megfelelő vonalainak rezgésszámai közelitőleg 1 : 4 : 9 : 16 arányban állanak egymással. Ennek egyszerű magyarázata az, hogy a külső «világító» vagy vegyértékelektron (Leuchtelektron, Valenzelektron) energiája arányos a többi elektron negatív töltése által csökkentett hatékony vagy «effektív» központi töltés négyzetével.

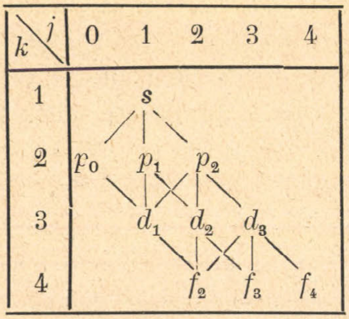
Az alkálidublettek egyes tagjait a belső kvantumszámmal különböztettünk meg egymástól. Hasonlóképpen járunk el a többi multiplettrendszernél is; így az alkáliföldek triplettrendszerét a kvantumszámok kétféle normirozása szerint [2] a következő schemákba foglalhatjuk:

---

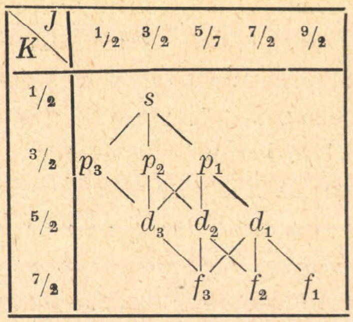
[1] A neutrális atomot I-el, az egyszer ionizáltat II-vel, a kétszer ionizáltat III-al és így tovább, jelöljük. — A szikraspektrumokat arról lehet megismerni, hogy a magasabb sorszámú tagok $\frac{4R}{n^2}$, $\frac{9R}{n^2}$, $\frac{16R}{n^2}$ formulákkal közelithetők meg, míg az ívspektrumok tagjai $\frac{R}{n^2}$-hez közelednek. A csősugarak elektromos eltérítéséből sikerült kimutatni, hogy a $4R$-hez tartozó szériest emittáló részecskék egyszeres, a $9R$-hez tartozók kétszeres pozitív elemi töltést tartalmaznak, az $\frac{R}{n^2}$-szerű spektrumot pedig neutrális atomok bocsátják ki.

[2] A SOMMERFELD-féle normirozás (k, j) a LANDÉ-félével (K, J) a következőképpen függ össze: $k=K+\frac{1}{2}$, $j=J-\frac{1}{2}$. Páros multipletteknél J egész szám, páratlan multipletteknél pedig $\frac{1}{2}$ páratlan többszöröse; K mindig$=\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$,... — A tagoknak indexekkel való megkülönböztetésére LANDÉ a régi jelölést használja, melynél az indexek növekedésével a tagok számértéke is növekszik (így pl. $p_1<p_2<p_3$; a számozás mindig 1-el kezdődik). Ezzel ellentétben SOMMERFELD a páratlan multipletteknél j-t használja index gyanánt (pl.: $p_0>p_1>p_2$), a páros multipletteknél pedig $j+\frac{1}{2}$-et.

(SOMMERFELD)

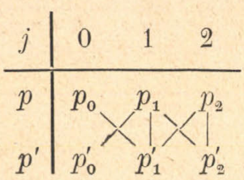


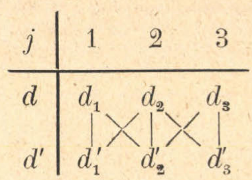
(LANDÉ)



E schemákban az összekötő vonalakkal jelzett empirikus kombinációk a belső kvantumszámra vonatkozó $J = J, J \pm 1$ kiválasztási szabályt követik, úgy mint az alkáliáknál. Az (sp) kombináció három színképvonalat, a (pd) pedig hat vonalat tartalmaz.

Az alkáliföldek spektrumában a RITZ-féle formulákat követő p és d tagokon kívül fellépnek még «nem RITZ-féle» vagy másként *heteromorf* p' és d' tagok (gestrichene Terme), melyek nagyjában a «RITZ-féle» p és d szériesek teljes egészében való eltolásával (a kisebb frekvenciák felé) állíthatók elő, tehát $np' = np - A$, hol A a p és p' szériesek határainak különbségét jelenti. A tapasztalat szerint előfordul a (pp') és (dd') kombináció, de (pd') vagy (dp') sohasem.[1] A (pp') és (dd') kombinációkra a belső kvantumszám kiválasztási szabályán kívül még j-re a $0 \rightarrow 0$ (LANDÉ szerint J-re $\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$) kombináció tilalma érvényes:





[1] Ez a körülmény az azimutális kvantumszám kiválasztási elvének áttörését jelenti. Heteromorf átmenetekre általában érvényes a $k \rightarrow k$ szabály.

Az alkáliföldeknél a triplettrendszeren kívül még egy szingulettrendszer is fellép. A szingulett-tagok: S, P, D, F az azimutális kvantumszám kiválasztási szabálya szerint kombinálódnak és így az (SP), (PD) stb. egyszeres vonalakból álló szériesek keletkeznek. Azonban nemcsak szingulett-szingulett és triplett-triplett kombinációk lehetségesek, hanem előfordulnak ú. n. *interkombinációk* szingulett és triplett-tagok között. Ezeket az interkombinációkat összhangba hozhatjuk az eddigi kiválasztási szabályokkal, ha a szingulett-tagokhoz is belső kvantumszámokat rendelünk a következőképpen:

$k \backslash j$	0	1	2	3
1	S			
2		P		
3			D	
4				F

Az interkombinációs vonalak a $k \rightarrow k \pm 1$ és $j \rightarrow j$, $j \pm 1$ megengedett átmenetek és a j-re vonatkozó $0 \rightarrow 0$ tilalom figyelembevételével adódnak:

$k \backslash j$	0	1	2
1	S		
2	p_0	p_1	p_2
3			D

$k \backslash j$	1	2	3
1	s		
2	P		
3	d_1	d_2	d_3

Nevezetes és egyszerű törvényszerűséget tapasztaltak a triplettek *intervallumviszonyaira.* Ugyanis a tagok egymástól való távolságára kielégítő pontossággal érvényesek a következő arányok:

$$(p_0 - p_1) : (p_1 - p_2) = 1 : 2$$
$$(d_1 - d_2) : (d_2 - d_3) = 2 : 3$$
$$(f_2 - f_3) : (f_3 - f_4) = 3 : 4.$$

A jobboldalon álló számok nem egyebek, mint a szomszédos tagok LANDÉ-féle belső kvantumszámainak középértéke, pl. d_1-nél $J_1 = \frac{3}{2}$, d_2-nél $J_2 = \frac{5}{2}$, d_3-nál $J_3 = \frac{7}{2}$, ahonnan

$$\frac{J_1 + J_2}{2} : \frac{J_2 + J_3}{2} = 2 : 3.$$

Az alkáliák és alkáli-földfémek példáján láttuk, hogy egy multiplettrendszeren belül bármely szériestagot (a főkvantumszámtól és tagértéktől eltekintve) teljesen meghatároz a K és J kvantumszám. Tehát egy tag egyértelmű megadásához három adat szükséges: K, J és a multiplettfaj (szingulett, dublett, triplett stb.) megjelölése. Az egyes multiplettrendszerek jellemzésére új kvantumszámot vezetünk be, melyet R-el jelölünk. LANDÉ szerint[1] szinguletteknél $R = \frac{1}{2}$, dubletteknél $R = 1$, tripletteknél $R = \frac{3}{2}$, kvartetteknél $R = 2$ stb., általában R egyenlő a multiplicitás felével. Ami K-t illeti, $s, p, d, f, \ldots$ tagoknál $K = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \ldots$ A belső kvantumszám J páros multipletteknél egész szám, páratlan multipletteknél $\frac{1}{2}$-nek páratlan többszöröse. Valamely megadott R és K-hoz tartozó J értékeket a

$$|K - R| + \tfrac{1}{2} \leqq J \leqq |K + R| - \tfrac{1}{2}$$

egyenlőtlenség (Strukturregel) adja meg, melyből közvetlenül látható, hogy a teljes, vagyis $2R$-szeres multiplicitás csak akkor lép fel, ha $K \geqq R$. Ha pedig $K < R$, úgy a multiplicitás kisebb $2R$-nél. Az s-tag minden multiplettrendszerben egyszeres. A dublett és triplettrendszerben már a p-tag teljes multiplicitású, amint azt az alkáliák és az alkáliföldek esetében láttuk. A kvartettrendszerben a p-tag háromszoros, a d-tag már négyszeres; a kvintett p-tag háromszoros, a d-tag ötszörös; a szextett p-tag

[1] A következőkben mindig a LANDÉ-féle normirozást fogjuk használni.

szintén háromszoros, a d-tag ötszörös, az f-tag hatszoros stb. Szabály, hogy a nem teljes multiplicitás mindig páratlan.

A K, J, R kvantumszámok kiválasztási szabálya:

$$K \begin{matrix} \nearrow K+1 \\ \searrow K-1 \end{matrix}$$

$$J \begin{matrix} \nearrow J+1 \\ \rightarrow J \\ \searrow J-1 \end{matrix}$$

$$R \begin{matrix} \nearrow R+1 \\ \rightarrow R \\ \searrow R-1 \end{matrix}$$

Ezekhez járul még a $J = \frac{1}{2} \longrightarrow J = \frac{1}{2}$ kombináció tilalma. (Fentebb már szóltunk arról, hogy heteromorf tagok közötti kombinációkra a $K \longrightarrow K \pm 1$ kiválasztási elv nem érvényes.) Az R-re vonatkozó kiválasztási elv szerint különböző multiplettrendszerek között a következő interkombinációk lehetségesek:

szingulett—triplett, triplett—kvintett, kvintett—szeptett;
dublett—kvartett, kvartett—szextett, szextett—oktett.

Az említett Rydberg—Landé-féle váltakozási szabályt úgy fogalmazhatjuk, hogy R-ből $R \pm \frac{1}{2}$ lesz, ha az elemek periodikus rendszerében egy oszloppal jobbra haladunk, így pl. az alkáliáknál $R = 1$, az alkáliföldeknél $R = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, a földfémeknél $R = 1, 2$ ($R = 0$ nem lehet) stb.[1]

A multiplettek anomális Zeeman-effektusára jellemző a tagok ekvidisztans mágneses felhasadása, melyet a

$$\Delta\nu = mg\,\Delta\nu_{\mathrm{norm}}$$

formula állít elő, melyben $\Delta\nu_{\mathrm{norm}} = \dfrac{eH}{4\pi\mu c}$ a normális felbon-

[1] E nagyfontosságú szabály modellszerű értelmezése nagy nehézségekbe ütközik.

tás intervalluma, g a «felhasadási faktor», m a mágneses kvantumszám. A g-értékeket (melyek a RUNGE-szabály szerint racionálisak) a tapasztalattal kitünően egyező

$$g = \tfrac{3}{2} + \frac{R^2 - K^2}{2(J^2 - \frac{1}{4})} \tag{5}$$

formula adja meg; a mágneses kvantumszámra a

$$-J + \tfrac{1}{2} \leqq m \leqq J - \tfrac{1}{2}$$

feltétel érvényes, tehát m a páratlan multipletteknél egész szám, páros multipletteknél pedig $\frac{1}{2}$-nek páratlan többszöröse. Ugyanazon R, K, J-hez tartozó m-ek száma, vagyis egy multiplett-tag mágneses komponenseinek száma $2J$. Az $m \rightarrow m$ átmenetekből π-komponensek, az $m \rightarrow m \pm 1$ átmenetekből pedig σ-komponensek származnak.

A mellékelt LANDÉ-féle táblázat a g-faktoroknak az (5) képletből számított értékeit tünteti fel és egyúttal tájékoztat a multiplettrendszerek jellemző sajátságairól. Az előforduló $\frac{0}{0}$ faktorok tényleges értéke zérus.

A legfelső sorban feltüntetett

$$\Delta\nu = 1:2:3:4:\cdots \text{ és } \Delta\nu = \tfrac{1}{2}:\tfrac{3}{2}:\tfrac{5}{2}:\tfrac{7}{2}:\cdots$$

arányok a páratlan, illetőleg páros multiplettek intervallumviszonyaira vonatkoznak. A triplettrendszerek tárgyalásánál említettük azt a szabályt, hogy ezek az arányszámok tulajdonképpen az intervallumokat határoló tagok belső kvantumszámainak középértékei.

5. Paschen—Back-effektus.

Az (5) alatti g-formula csak gyenge mágneses tereknél érvényes, melyeknél a mágneses felbontás szélessége még nem éri el a multiplett tagjainak egymástól való távolságát. A mágneses tér erősségének növelésével az eredetileg szimmetrikus kép eltorzul, egyes vonalak intenzitása elenyészik, úgy hogy egy komplikált átalakulás után a mágneses tér további erősítésé-

g-tabella.

$\Delta\nu$	$=1:2:3:4:5:6:7:$								$=\frac{3}{2}:\frac{5}{2}:\frac{7}{2}:\frac{9}{2}:\frac{11}{2}:\frac{13}{2}:\frac{15}{2}:$								$\Delta\nu$
$K \backslash J$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{15}{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	J / K
$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{0}$							szingulett	2							dublett	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$		1						$R=\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$						$R=\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{5}{2}$			1							$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{5}$						$\frac{5}{2}$
$\frac{7}{2}$				1							$\frac{6}{7}$	$\frac{8}{7}$					$\frac{7}{2}$
$\frac{9}{2}$					1							$\frac{8}{9}$	$\frac{10}{9}$				$\frac{9}{2}$
$\frac{1}{2}$		2						triplett		2						kvartett	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$					$R=\frac{3}{2}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{26}{15}$	$\frac{8}{5}$					$R=\frac{4}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{5}{2}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{4}{3}$					0	$\frac{6}{5}$	$\frac{48}{35}$	$\frac{10}{7}$					$\frac{5}{2}$
$\frac{7}{2}$			$\frac{2}{3}$	$\frac{13}{12}$	$\frac{5}{4}$					$\frac{2}{5}$	$\frac{36}{35}$	$\frac{78}{63}$	$\frac{4}{3}$				$\frac{7}{2}$
$\frac{9}{2}$				$\frac{3}{4}$	$\frac{21}{20}$	$\frac{6}{5}$					$\frac{4}{7}$	$\frac{62}{63}$	$\frac{116}{99}$	$\frac{14}{11}$			$\frac{9}{2}$
$\frac{1}{2}$			2					kvintett			2					szextett	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$		$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{5}{3}$				$R=\frac{5}{2}$		$\frac{12}{5}$	$\frac{66}{35}$	$\frac{12}{7}$				$R=\frac{8}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{5}{2}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$				$\frac{10}{3}$	$\frac{28}{15}$	$\frac{58}{35}$	$\frac{100}{63}$	$\frac{14}{9}$				$\frac{5}{2}$
$\frac{7}{2}$		0	1	$\frac{5}{4}$	$\frac{27}{20}$	$\frac{7}{5}$			$-\frac{2}{3}$	$\frac{16}{15}$	$\frac{46}{35}$	$\frac{88}{63}$	$\frac{142}{99}$	$\frac{16}{11}$			$\frac{7}{2}$
$\frac{9}{2}$			$\frac{1}{3}$	$\frac{11}{12}$	$\frac{23}{20}$	$\frac{19}{15}$	$\frac{4}{3}$			0	$\frac{6}{7}$	$\frac{8}{7}$	$\frac{14}{11}$	$\frac{192}{143}$	$\frac{18}{13}$		$\frac{9}{2}$
$\frac{1}{2}$				2				szeptett				2				oktett	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$			$\frac{7}{3}$	$\frac{23}{12}$	$\frac{7}{4}$			$R=\frac{7}{2}$			$\frac{16}{7}$	$\frac{122}{63}$	$\frac{16}{9}$			$R=\frac{8}{2}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{5}{2}$		3	2	$\frac{7}{4}$	$\frac{33}{20}$	$\frac{8}{5}$				$\frac{14}{5}$	$\frac{72}{35}$	$\frac{38}{21}$	$\frac{56}{33}$	$\frac{18}{11}$			$\frac{5}{2}$
$\frac{7}{2}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$		4	2	$\frac{12}{7}$	$\frac{34}{21}$	$\frac{52}{33}$	$\frac{222}{143}$	$\frac{20}{13}$		$\frac{7}{2}$
$\frac{9}{2}$		$-\frac{1}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{13}{10}$	$\frac{41}{30}$	$\frac{59}{42}$	$\frac{10}{7}$	$-{}^{4}/_{3}$	$\frac{14}{15}$	$\frac{44}{35}$	$\frac{86}{63}$	$\frac{140}{99}$	$\frac{206}{143}$	$\frac{284}{195}$	$\frac{22}{15}$	$\frac{9}{2}$
K / J	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{9}{2}$	$\frac{11}{2}$	$\frac{13}{2}$	$\frac{15}{2}$	1	2	3	4	5	6	7	8	$J \backslash K$

nél az egész vonalkomplexumból csupán három vonal marad meg, melyek normális LORENTZ-triplettet alkotnak, még pedig olyan elhelyeződésben, hogy a középső, vagyis π-komponens az eredeti térnélküli vonalcsoport «súlypontjára» esik,[1] a két σ-vonal pedig attól $\pm \Delta\nu_{\text{norm}}$ távolságra van. Ezt a jelenséget PASCHEN és BACK fedezték fel.

Gyakran fellép a «parciális» PASCHEN—BACK-effektus, amelyet csak úgy érthetünk meg, ha a PASCHEN—BACK-átalakulást nem a színképvonalakon, hanem a tagokon vizsgáljuk, vagyis az mg értékeket vesszük figyelembe. A parciális effektus akkor fordul elő, ha az alkalmazott mágneses tér a kombinálódó széries-tagok egyikére nézve még gyenge, míg a másikra erős, azaz, ha

$$\Delta\nu_{\text{I}} \gg \Delta\nu_{\text{magn}} \gg \Delta\nu_{\text{II}},$$

hol $\Delta\nu_{\text{I}}$ és $\Delta\nu_{\text{II}}$ a kombinációban szereplő tagok térnélküli intervallumait, $\Delta\nu_{\text{magn}}$ pedig a mágneses komponensek távolságát jelenti. Ez az eset áll fenn pl. a magnézium triplettrendszerében a $2p_i - 3d$ vonalnál, mivel a d-triplett tagjainak egymástól való távolsága a Mg-nál oly csekély, hogy a d-nivó egyszeresnek számít bármilyen gyenge tereknél. Így a p_0, p_1, p_2 tagok gyenge tereknél fellépő ZEEMAN-nivói kombinálódnak a d_1, d_2, d_3 tagok PASCHEN—BACK-nivóival. A p-tagok ZEEMAN-nivóit, vagyis mg értékeit a g-táblázatból a (6) feltétel alkalmazásával kapjuk meg:

m	-2	-1	0	$+1$	$+2$
p_0			0		
p_1		$-3/2$	0	$3/2$	
p_2	-3	$-3/2$	0	$3/2$	3

Hogy megkaphassuk a tapasztalt felbontást, a d-tagok PASCHEN—BACK-nivóira a következő mg-értékeket kell felvennünk:

[1] Pl. a Na D-vonalainak súlypontja D_1-től $\frac{2}{3}\Delta\nu$-re, D_2-től $-\frac{1}{3}\Delta\nu$-re van, ha $\Delta\nu$-vel a D-vonalak egymástól való távolságát jelöljük.

m	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$
d_1			-2	-1	0		
d_2		-3	-1	0	$+1$	$+2$	
d_3	-4	-2	0	$+1$	$+2$	$+3$	$+4$

E két schemából az m- és J-kiválasztási elv alkalmazásával a következő felbomlás adódik ($\Delta\nu_{\text{norm}}$-al mérve):

$$\pi\text{-komponensek: } 0, \pm\tfrac{1}{2}, \pm 1, (\pm\tfrac{3}{2}),$$
$$\sigma\text{-komponensek: } 0, \pm\tfrac{1}{2}, \pm 1, \pm\tfrac{3}{2}, \pm 2, (\pm\tfrac{5}{2}), (\pm 3).$$

A zárójelbe tett vonalak a tapasztalt felbontásból hiányoznak vagy legalább is nem lépnek fel észrevehető intenzitással.

Erős tereknél az mg-értékek mindig egész számok. Az mg-értékek gyenge térről erős térre való átmenetnél úgy változnak meg, hogy a $\sum\limits_J mg$ összeg értéke változatlan marad, ha fix m, K és R mellett J-re összegezünk. Ezt a törvényt az mg-összegek *permanenciájának* nevezik. Az alábbi táblák a dublettek és triplettek mg-inek átalakulását mutatják a

gyenge tér $\rightarrow$ erős tér

irányban.

Dubletteк. $R = {}^2/_2$.

K J \ m	$-{}^5/_2$	$-{}^3/_2$	$-{}^1/_2$	$+{}^1/_2$	$+{}^3/_2$	$+{}^5/_2$
${}^1/_2$ 1			$-1 \rightarrow -1$	$1 \rightarrow 1$		
${}^3/_2$ 1			$-{}^1/_3 \rightarrow -1$	${}^1/_3 \rightarrow 0$		
${}^3/_2$ 2		$-2 \rightarrow -2$	$-{}^2/_3 \rightarrow 0$	${}^2/_3 \rightarrow 1$	$2 \rightarrow 2$	
${}^5/_2$ 2		$-{}^6/_5 \rightarrow -2$	$-{}^2/_5 \rightarrow -1$	${}^2/_5 \rightarrow 0$	${}^6/_5 \rightarrow 1$	
${}^5/_2$ 3	$-3 \rightarrow -3$	$-{}^9/_5 \rightarrow -1$	$-{}^3/_5 \rightarrow 0$	${}^3/_5 \rightarrow 1$	${}^9/_5 \rightarrow 2$	$3 \rightarrow 3$

Triplettek. $R = {}^{3}/_{2}$.

K	J \ m	-3	-2	-1	0	$+1$	$+2$	$+3$
$^1/_2$	$^1/_2$			$-2 \to -2$	$0 \to 0$	$2 \to 2$		
$^3/_2$	$^1/_2$				$0 \to -1$			
	$^3/_2$			$-{}^3/_2 \to -2$	$0 \to 0$	$^3/_2 \to 1$		
	$^5/_2$		$-3 \to -3$	$-{}^3/_2 \to -1$	$0 \to 1$	$^3/_2 \to 2$	$3 \to 3$	
$^5/_2$	$^3/_2$			$-{}^1/_2 \to -2$	$0 \to -1$	$^1/_2 \to 0$		
	$^5/_2$		$-{}^{14}/_6 \to -3$	$-{}^7/_6 \to -1$	$0 \to 0$	$^7/_6 \to 1$	$^{14}/_6 \to 2$	
	$^7/_2$	$-4 \to -4$	$-{}^8/_3 \to -2$	$-{}^4/_3 \to 0$	$0 \to 1$	$^4/_3 \to 2$	$^8/_3 \to 3$	$4 \to 4$

A permanencia-elv, melyet e táblákon könnyen igazolhatunk, módot nyujt a gyenge terek g-értékeinek az erős terek egész számú mg-iből való kiszámítására.

6. Modellszerű vonatkozások.

A formálisan bevezetett R, K *és* J kvantumszámoknak nem tulajdoníthatunk közvetlen mechanikai jelentőséget oly értelemben, amint az a hydrogénatómnál a fő-, azimutális és mágneses kvantumszám bevezetésekor történhetik. Mégis több tekintetben célszerű, ha jobb híján a következő modellre («Ersatzmodell») gondolunk.

$K\frac{h}{2\pi}$ a világító elektron vagyis a külső leglazábban kötött elektron impulzusmomentuma, $R\frac{h}{2\pi}$ az *atomtörzsé* (Atomrumpf, Atomrest, vagyis az atóm többi része a világító külső elektron nélkül), $J\frac{h}{2\pi}$ az atóm összimpulzusmomentuma. E szerint J vektoriális összege R-nek és K-nak.[1]

---

[1] Ha több külső elektron tekinthető laza kötésük miatt világító elektronnak, úgy célszerű e külső elektronok eredő impulzusmomentumát venni K-nak.

E modell alapján a g-formulának egy közelítését nyerjük (még pedig $g = \frac{3}{2} + \frac{R^2 - K^2}{2J^2}$, tehát a nevezőben az $\frac{1}{4}$ hiányzik; v. ö. az (5) alatti g-formulával), ha feltesszük, hogy az atómtörzs mágneses momentumának és impulzusmomentumának hányadosa kétszer akkora, mint az elektrodinamika alapján számított érték. Ezt a feltevést az EINSTEIN—DE HAAS-effektusnál talált magneto-mechanikai anomália is támogatja. Újabban azonban fontos érveket hoztak fel ezen modell realitása ellen.

Kudar János.

MULTIPLETTSTRUKTUR UND ZEEMAN-EFFEKT DER SPEKTRALLINIEN.

Eine kurze Darstellung der Seriensystematik und der Komplexstruktur der Spektren.

Inhalt:

Einleitung: Terme und Serien. Das Wasserstoffspektrum.

1. Elektronentheorie und Quantentheorie des normalen ZEEMAN-Effektes.
2. Alkalispektren.
3. ZEEMAN-Effekt der Alkalien.
4. Systematik der Multipletts. Strukturregel. LANDÉ'sche g-Formel.
5. PASCHEN—BACK-Effekt.
6. Modellmässige Deutung der Quantenzahlen R, K, J.

J. Kudar.

A KVANTUMELMÉLET AXIOMATIKUS FELÉPÍTÉSE HEISENBERG, BORN ÉS JORDAN SZERINT.

(Előadta a szerző a Mathematikai és Fizikai Társulat 1926 február 11-én tartott ülésén.)

I. A «régi» kvantumelmélet.

1. §. A probléma.

A kvantumelmélet bevezetésére azok a nehézségek adtak alkalmat, melyek a hősugárzásnak a klasszikus mechanika és elektrodynamika alapján való értelmezésénél felmerültek. Miután Planck felismerte, hogy ezek a nehézségek elháríthatók, ha az elemi folyamatoknak a klasszikus elmélet szempontjából meg nem érthető nem folytonos szerkezetet tulajdonítunk és evvel az ú. n. kvantumelméletet megalapította, nemcsak a fekete test spektrumát sikerült értelmeznie, hanem nemsokára a szilárd testek specifikus hőjének viselkedéséről a legmélyebb temperaturáig terjedő intervallumban is számot lehetett adni. Mióta pedig Niels Bohr [1] 1913-ban a kvantumelmélet szempontjait felhasználva, a hydrogénatóm spektrumát értelmezte, a spektrumok rendkívül változatos és finom részletekben gazdag jelenségeit oly mértékben sikerült áttekinteni és rendezni, hogy ma

[1] Lásd a Bohr-féle elmélet elemeinek, melyeket ismertnek tételezünk fel, következő magyar nyelvű ismertetéseit:

Hevesy György: Mathematikai és Fizikai Lapok, 1914. 192. lap.

Pogány Béla: A fény. 1921. 325. lap.

Rhorer László: Kísérleti fizika. 537. lap.

Ortvay Rudolf: A Stella-almanachja 1926. évre 153. lap.

már egy egységes felfogással állunk szemben adatok és törvényszerűségek nyomasztó halmaza helyett.

Hogy a kvantumtörvényekben a természetnek olyan alapvető sajátságai jutnak kifejezésre, melyek a klasszikus mechanika és elektrodynamika alaptörvényeire nem vezethetők vissza, ma már általánosan elfogadott nézetté vált. Igen erősen támogatják ezt a feltevést többek közt azok a kisérleti vizsgálatok is, melyeket FRANCK és HERTZ elektronok és atomok ütközésére végeztek, kiknek sikerült kimutatni, hogy egy elektron az ütközésnél az atómnak csak meghatározott energiamennyiségeket adhat át.

A kvantumelmélet további kiépitésében az alkalmazások mindig szélesebbkörű kiterjesztésén kívül az elméletnek más alapfeltevésekre vissza nem vezethető, sajátlagos elemeinek tiszta kidolgozása és általános megfogalmazása képezte az egyik legfontosabb feladatot. Egy másik fontos feladat a kvantumelmélet és a klasszikus fizika közti szakadásnak valamilyen magasabb szempontból való áthidalása. Ezen szempontokból nagy jelentőséget kell tulajdonítanunk HEISENBERG [1] kezdeményezésének, ki egy következetes, a jelenségek nem folytonos jellegével eleve számoló általános fizikai felfogás kiépítésére tett kisérletet, melynek mathematikai alakját BORN és JORDAN közreműködésével állapitotta meg.[2]

2. §. A kvantumelmélet főtételei.

A kvantumelmélet alapfeltevéseit a következő megállapításokba foglalhatjuk össze:

1. Az elemi mechanikai rendszerek, mint az atomok, csak diszkrét állapotok sorában maradhatnak meg, melyekben ener-

---

[1] W. HEISENBERG: Zeitschr. f. Physik. 1925. 33. kötet, 879. lap.

[2] M. BORN és P. JORDAN: Zeitschrift f. Physik. 1925. 34. kötet, 858. lap. M. BORN, W. HEISENBERG és P. JORDAN: Zeitschrift f. Physik. 1926. 35. kötet, 557. lap.

W. HEISENBERG: Math. Ann. 95. 683. lap 1926.

giájuk meghatározott értékekkel bír. Egy ilyen állapotban a rendszer fényt nem sugároz ki, sugárzás mindig akkor jön létre, ha a rendszer egy ilyen stacionárius állapotból egy másikba megy át, midőn a két állapot energiájának különbsége a sugárzás energiájába megy át.

2. Minden átmenetnél két stacionárius állapot közt a rendszer monochromatikus sugárzást bocsát ki, melynek frekvenciáját ν-t a két állapot energiája az ú. n. Bohr-féle frekvenciafeltétellel határozza meg a következőkép:

$$\nu = \frac{W_i - W_k}{h}, \tag{I}$$

hol W_i a rendszer energiája a kezdeti, W_k a végállapotban és

$$h = 6{,}54 \; 10^{-27} \text{ erg. sec}$$

a Planck-féle univerzális állandó.

3. A sugárzás intenzitását az előbbiek szerint valamely átmenet gyakorisága határozza meg.

A kvantumelmélet első alapfeltevése éles ellentétben áll a klasszikus fizika rendszerével, mely a jelenségek lefolyását differenciálegyenletek segélyével határozza meg, hol a megoldások egy folytonos sokaságot képeznek. A kvantumelmélet ezen sokaságból egy diszkrét sort ragad ki azáltal, hogy a kezdeti feltételekre korlátozásokat ró ki. Így a klasszikus mechanika a hydrogénatom esetében, melynél egy negatív elektron kering a pozitív atómmag körül, mindenféle elliptikus pályát megenged, a kvantumelmélet azonban csak olyan ellipsziseket, melyek nagy átmérői meghatározott értékkel bírnak. Egy harmonikus rezgést végző, egyensúlyi helyzetéhez rugalmas erőkkel kötött tömegpont, az ú. n. harmonikus oscillator rezgésének amplitudóját a klasszikus elmélet nem korlátozza. A kvantumelmélet csak meghatározott amplitudókat enged meg.

Azokat a feltételeket, melyek segélyével a kvantumelmélet szerint lehetséges diszkrét állapotokat a klasszikus elmélet szerint megengedett állapotok sorából kiválaszthatjuk, a rendszerek egy igen általános osztályára megállapithatjuk. Nevezetesen azon rendszerekre, melyek koordinátái az időnek vagy közönséges értelemben periodikus vagy ú. n. feltételesen periodikus függvényei, azaz a mozgás mint harmonikus rezgések összetétele fogható fel, melyek frekvenciái egy vagy több alapfrekvencia egész számú együtthatókkal biró lineáris kifejezései:

$$\nu = \nu_1\tau_1 + \nu_2\tau_2 + \cdots + \nu_n\tau_n$$

hol $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ az inkommensurabilis alapfrekvenciák, $\tau_1, \tau_2 \ldots \tau_n$ egész számok.

Ezen esetben választhatók olyan koordináták

$$q_1, q_2, q_3 \ldots,$$

melyek mindegyike a rendszer minden mozgásánál két szélső érték közt változik. A koordinátákhoz tartozó impulzusok:

$$p_1, p_2, p_3 \ldots$$

Ezeket a kinetikus energiának a megfelelő általános sebességkomponens $\dot{q}_i$ szerinti deriváltja definiálja:

$$p_i = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}, \tag{1}$$

ha az időszerinti deriválást itt és a következőkben ponttal jelöljük.

A stacionárius állapotok feltételeit a következő egyenletek adják meg:

$$I_i = \oint p_i dq_i = n_i h, \quad i=1,2,\ldots,n \tag{II}$$

hol n_i egész szám a «kvantumszám» és h a PLANCK-féle állandó. Az integrál a q_i-k egész változási tartományára és vissza terjesztendő ki.

Alkalmazzuk e feltételt a hydrogénatóm körpályáira. Legyen $q = \varphi$ a magtól az elektronhoz húzott radiusvektornak egy a magon áthúzott egyenessel bezárt szöge és p_φ a megfelelő impulzusmomentum. Ekkor

$$p_\varphi = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\tfrac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2\right) = mrv, \tag{2}$$

hol $v = r.\dot{\varphi}$ a sebességet, r a radiusvektort, m az elektron tömegét jelenti.

Ekkor a (II) feltétel az elemi tárgyalásból ismert feltételbe megy át:

$$2\pi . p_{\varphi} = 2\pi mrv = n.h, \tag{3}$$

azaz az elektron impulzusmomentuma $\frac{h}{2\pi}$ egész számú többszöröse lehet csupán.

3. §. A korrespondencia elve.

A kvantumelmélet és a klasszikus fizika viszonyának megállapítására hasonlítsuk össze a kvantumelmélet szerint fellépő sugárzást avval a sugárzással, amit a klasszikus elmélet szerint elvárhatunk. A klasszikus elmélet szerint a sugárzásra mérvadók az elektronrendszer mozgásának (pontosabban az elektromos momentumnak) harmonikus komponensei. A rendszer koordinátáit mint harmónikus rezgések összetételét fogjuk fel, azaz azokat egyszerűen periodikus mozgás esetében FOURIER-féle sorba fejtjük, melynek alakja, ha a trigonometrikus függvényeket exponenciális függvényekkel fejezzük ki, a következő:

$$q = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} q_{\tau} e^{2\pi i \nu \tau t}. \tag{4}$$

Az egyes harmonikus komponensek frekvenciái a ν alapfrekvencia egész számú sokszorosai:

$$\nu,\ 2\nu,\ 3\nu, \ldots\ \tau\nu, \ldots \tag{5}$$

a megfelelő amplitudók:

$$q_1,\ q_2,\ q_3, \ldots\ q_{\tau}. \tag{6}$$

Az elektronelmélet szerint a τ-ik harmonikus komponensnek megfelel egy elektromágneses, monochromatikus, az atómból kiinduló gömbhullám $\nu\tau$ frekvenciával és q_{τ}^2-el arányos intenzitással.

Egyenletes körmozgás esetében a derékszögű koordináták egyszerű harmonikus mozgást végeznek, a FOURIER-féle sor két taggá redukálódik, melyekben $\tau = +1$ és -1, a sugárzásban pedig csak az alapfrekvencia lép fel.

Elliptikus mozgás esetében az alapfrekvencián kívül annak sokszorosai is előfordulnak és így egy egész spektrumot kapunk. Az elliptikus mozgást, mint egyenletes körmozgások összetételét foghatjuk fel, melyek frekvenciái az alapfrekvencia egész számú többszörösei, sugarai pedig a FOURIER-sor együtthatóival vannak meghatározva. Ez nem más, mint az elliptikus mozgás előállítása egymáson gördülő epiciklusok segélyével a régi astronomusok módszere szerint.

A feltételesen periodikus mozgás esetében a koordináták hasonló trigonometrikus sorral állíthatók elő:

$$q_i = \sum_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n=-\infty}^{+\infty} q_{\tau_1\tau_2\ldots\tau_n}\, e^{2\pi i(\nu_1\tau_1+\nu_2\tau_2+\cdots+\nu_n\tau_n)t}, \tag{7}$$

melyben a sor minden tagja egy harmonikus rezgésnek felel meg, melynek frekvenciája

$$\nu_{\tau_1\ldots\tau_n} = \nu_1\tau_1 + \nu_2\tau_2 + \cdots + \nu_n\tau_n$$

és hol $\nu_1 \ldots \nu_n$ alapfrekvenciák és így általában az egyes $\nu_{\tau_1\ldots\tau_2}$ frekvenciák is inkommensurabilisek. Ezért bár a sor minden tagja az idő periodikus függvénye, az egész sor és így a koordináta az időnek általában véve nem periodikus függvénye. A feltételesen periódikus mozgás esetével a továbbiakban nem foglalkozunk részletesebben.

A kvantumelméleti frekvenciák nem egyeznek meg általában a stacionárius pályák klasszikus frekvenciáival. Csakis abban az esetben, ha a pályák kvantumszámai nagyok azok különbségéhez képest, áll fenn aszimptotikus megegyezés. Ha a két pálya kvantumszámainak különbsége τ, úgy a kvantumelméleti frekvencia határesetben a τ-ik klasszikus felrezgéssel egyezik meg.

$$\nu_{kv} \longrightarrow \tau\nu_{kl}. \tag{9}$$

Ezt az összefüggést beláthatjuk, ha a klasszikus mechanika egy általános érvényű tételét tekintetbe vesszük, mely szerint a klasszikus alapfrekvencia egyszerűen periodikus mozgásnál:

$$\nu_{kl} = \frac{\partial W}{\partial I}, \tag{I'}$$

hol W az energia és $I = \oint p dq$. Többszörösen periodikus mozgásnál az alapfrekvenciákat a megfelelő I_i fázisintegrálok szerinti deriválással kapjuk meg.[1]

---

[1] Ezen alapvető tétel bizonyítása egyszerűen periodikus mozgás esetében a következő.

Variálva az

$$I = \oint p dq = \int_0^T p\dot{q} dt \tag{10}$$

fázisintegrált, hol T a mozgás periodusa, lesz:

$$\delta I = \int_0^T (\dot{q}\delta p + p\delta\dot{q})\, dt + |p\dot{q}\delta t|_0^T. \tag{11}$$

Az integrál második tagját parciálisan integrálva:

$$\int p\delta\dot{q} dt = \int p\delta dq = \int p d\delta q = p\delta q - \int \delta q\dot{p} dt \tag{12}$$

és behelyettesítve:

$$\delta I = \int_0^T (\dot{q}\delta p - \dot{p}\delta q)\, dt + |p(\dot{q}\delta t + \delta q)|_0^T. \tag{13}$$

Az integrálon kívül álló tag periodikus mozgásnál eltűnik, mert p periodikus és $\dot{q}\delta t + \delta q$ a végpont variációja, mindkettő 0 és T időben ugyanazt az értéket veszi fel. Az integrált a kanonikus mozgásegyenletek segélyével:

$$\dot{q} = \frac{\partial W}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial W}{\partial q} \tag{14}$$

átalakíthatjuk:

$$\delta I = \int_0^T \left(\frac{\partial W}{\partial p}\delta p + \frac{\partial W}{\partial q}\delta q\right) dt = \int_0^T \delta W dt. \tag{15}$$

Ha a variációt a kezdeti feltételek megváltoztatásával δW energia hozzáadásával eszközöltük, úgy ez a mozgás folytán nem változik és az integrál jele elé vihető:

$$\delta I = T \cdot \delta W. \tag{16}$$

Mivel a frekvencia a periodus reciprokja, ez tételünkkel identikus egyenlet.

Az (I') tétel a kvantumelmélet (I) egyenletének analogonját képezi, melyhez úgy viszonylik, mint egy differenciálhányados egy differenciahányadoshoz. Ugyanis, ha a kvantumszám τ-val változik, a fázisintegrál $I=nh$ változása $\triangle I=\tau . h$ és a kvantumelméleti frekvencia:

$$\nu_{kv} = \frac{W_1 - W_2}{h} = \frac{W_1 - W_2}{h\tau}\tau = \frac{\triangle W}{\triangle I}\tau. \tag{17}$$

Nagy kvantumszámok esetében aszimptotikusan:

$$\nu_{kv} = \frac{\triangle W}{\triangle I}\tau \rightarrow \frac{\partial W}{\partial I}\tau = \nu_k \tau. \tag{18}$$

Ezen aszimptotikus megegyezés klasszikus és kvantumelméleti frekvenciák közt képezi a Bohr-féle korrespondencia elv tartalmát.

Hydrogénatóm esetében körpályákat véve tekintetbe, az (I') egyenlet közvetlenül igazolható.

Az energia az n-ik körpályában:

$$W = -\frac{2\pi^2 me^4}{h^2 n^2}, \tag{19}$$

a klasszikus frekvencia pedig mint a szögsebesség és 2π hányadosa lesz:[1]

$$\nu_{kl} = \frac{4\pi^2 me^4}{h^3 n^3} = \frac{2}{n^3} R, \tag{20}$$

hol $R = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3}$ a Rydberg-féle állandó. Tehát fennáll (19) és (20) alapján

$$\frac{\partial W}{\partial I} = \frac{\partial W}{\partial (nh)} = \nu_{kl} \tag{21}$$

megfelelően (I')-nek.

A kvantumelméleti frekvencia az $n+\tau$-ik pályáról az n-ikre való ugrásnál lesz:

---

[1] Lásd pl. Pogány Béla: A fény. 326. l. 70. egyenlet.

$$\nu_{kv} = \frac{2\pi^2 me^4}{h^3}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+\tau)^2}\right) = R\frac{2n\tau+\tau^2}{n^2(n+\tau)^2}, \tag{22}$$

ha τ kicsi n-hez képest, úgy τ n mellett és τ^2 $2n\tau$ mellett elhagyható és lesz:

$$\nu_{kv} \sim \frac{2R}{n^3}\tau = \nu_{kl}\tau. \tag{23}$$

A korrespondencia elvét, mely közvetlenül csak a frekvenciákra vonatkozik, úgy általánosította BOHR, hogy a sugárzás intenzitásának aszimptotikus megegyezését is feltette. Azonkívül kis kvantumszámok esetében is közelítő megegyezést veszünk fel. Az így kibővített korrespondencia-elvből igen fontos következtetéseket lehetett vonni a kvantumelméletre a klassikus rezgésekkel való összehasonlítás által.

Fontos eset, ha a megfelelő klasszikus frekvencia nem lép fel a FOURIER-sorban, amit úgy is fejezhetünk ki, hogy a megfelelő amplitudo zérus. Ekkor arra következtetünk, hogy a megfelelő kvantumelméleti átmenet nem lehetséges, azaz valószínűsége zérus. Így a körpályák esetében csak az alapfrekvencia, ami $\tau = \pm 1$-hez tartozik, fordul elő. Ezért arra következtetünk, hogy a megfelelő kvantumelméleti átmenetnél a kvantumszám csak egy egységgel ugorhatik, azaz csak szomszédos körpályák közti átmenet lehetséges. Minden más átmenet elliptikus pályák közt történik, melyek FOURIER-sorában a magasabb harmonikus tagok is előfordulnak. A korrespondencia elve adja értelmezését az összes kiválasztási elveknek, melyek az azimutális, belső és mágneses kvantumszámok változására megszorításokat rónak ki.

A korrespondeáló klasszikus rezgés amplitudójából a kvantumelméleti intenzitásra vonhatunk következtetéseket, főkép egymáshoz közelálló vonalak intenzitásának viszonyára, így a ZEEMAN és STARK effektusnál és multipletteknél. Ha a korrespondencia-elv szigorúan nem is szolgáltatta az intenzitásokat, útmutatást nyujtott oly általánosításokra, melyek segélyével az intenzitások törvényeit sikerült nagyrészt felismerni.

A kiválasztási elveket alkalmazva, sikerült a ZEEMAN és STARK effektusnál fellépő vonalak polárossági viszonyait értelmezni. Legújabban pedig KRAMERSnek a korrespondencia-elv segélyével a diszperzió elméletét sikerült felépitenie a kvantumelmélet alapján, midőn a klasszikus elmélet rezonátorainak frekvenciái helyébe a kvantumelméleti frekvenciák, a képletekbe pedig differenciálhányadosok helyébe differenciahányadosok lépnek. A korrespondencia elve szerint a klasszikus fizika a nem folytonos valóság folytonos approximációja és így hidat épít a klasszikus és kvantumelméleti fizika közt. De az az állapot, hogy a fizika két heterogen elméletre bomlik, melyek közti kapcsolatot egy harmadik, meglehetős határozatlanságot tartalmazó elv közvetiti, éppenséggel nem tekinthető kielégítőnek és legfeljebb átmeneti jogosultsággal bír.

II. Az új kvantumelmélet.

1. §. Az elmélet alapjai.

HEISENBERG alapvető értekezésében a korrespondencia-elv és a KRAMERS-féle diszperzióelmélet szempontjaiból indult ki és elmélete a korrespondencia-elv szabatos kiépítésének tekinthető. Meggondolásaiban azonban az a szempont is fontos szerepet játszott, hogy az elméletből mindazt eliminálja, ami közvetlen észlelés tárgyát nem képezheti. Észleléseink a sugárzás frekvenciájára és a megfelelő komponensek intenzitásaira vonatkoznak, ellenben nem vonatkoznak pl. az elektron helyére pályájában, nem vonatkoznak a rezgés abszolut fázisaira. Azért nem állít fel alaptörvényeket, melyek az elektronok helyét minden időpillanatban meghatározzák, hanem olyan egyenletrendszert, melyek csupán a stacionárius állapotok közti átmenetek valószínűségeit és az azokhoz tartozó frekvenciákat határozzák meg.

A klasszikus elméletben ennek a követelménynek megfelel az, ha közvetlenül a FOURIER-sor tagjai, azaz a harmonikus komponensek iránt érdeklődünk. A kvantumelméletben pedig azokat a kifejezéseket keressük, melyek a klasszikus elmélet harmonikus komponenseinek analogonját képezik és a sugárzás sajátságait meghatározzák.

A klasszikus elméletben a koordináták és az impulzusok FOURIER-sorai harmonikus komponenseinek:

$$q_\tau e^{2\pi i\nu\tau t}, \quad p_\tau e^{2\pi i\nu\tau t} \tag{24}$$

megfelel két n és m sorszámmal ellátott stacionárius állapot közti átmenethez tartozó mennyiség:

$$q\,(n, m)\, e^{2\pi i\nu\,(n,\,m)\,t}, \quad p\,(n, m)\, e^{2\pi i\nu\,(n,\,m)\,t}. \tag{25}$$

Itt $\nu\,(n, m)$ az n-ik állapotból az m-ik állapotba való átmenetnél kisugárzott fény frekvenciája, az exponenciális kifejezés együtthatója pedig az átmenet valószínűségének mértéke. A $\nu\,(n, m)$, $q\,(n, m)$, ill. $p\,(n, m)$ az, aminek közvetlen fizikai jelentése van, a fenti kifejezések csak ideális elemek, melyek jelentősége abban áll, hogy rájuk mondhatók ki egyszerűen az alaptörvények. Semmikép sem foghatók fel ezek mint egy mozgás harmonikus komponensei, úgy mint a klasszikus esetben. Ezek mindegyikét a rendszer két stacionárius állapota a kezdeti és végállapot határozza meg, míg a klasszikus esetben a harmonikus komponenseket egy állapot mozgása meghatározza. Hogy két állapottól függnek a fenti «kvantumelméleti alapváltozók», az kifejezést ad az új elmélet és a klasszikus elmélet egészen eltérő beállításának. A klasszikus elmélet szempontjából teljesen érthetetlen, hogy az elektron által kibocsátott sugárzás a végállapottól függjön, azaz a sugárzás tudja, hogy hol fog az elektron megállapodni.

Feltesszük, hogy az n és m index felcserélésével a kvantumelméleti alapváltozók konjugált komplex értékeket vesznek fel, azaz:

$$q\,(n, m)\, q\,(m, n) = |\,q\,(n, m)\,|^2 \tag{26}$$

$$\nu\,(n, m) = -\,\nu\,(m, n). \tag{27}$$

Azt is feltesszük, hogy:

$$\nu(n, n) = 0$$

és

$$\nu(n, m) \neq 0, \quad \text{ha} \quad n \neq m. \tag{28}$$

Ezen utóbbi feltétel nincs mindig kielégítve, de ezen esetekkel itt nem foglalkozunk.

A frekvenciákra feltesszük a szpektroszkópia RITZ-féle kombináció elvének érvényét, mely szerint a k, l, m sorszámú állapotok közti átmenetekhez tartozó frekvenciák közt fennáll:

$$\nu(k, l) + \nu(l, m) = \nu(k, m). \tag{A}$$

Ebből következik, hogy léteznek olyan A_i mennyiségek, melyek csak a megfelelő stacionárius állapottól függnek és melyek különbsége egyenlő a frekvenciával:

$$\nu(n, m) = A_n - A_m. \tag{29}$$

A kombináció elvéből csak arra következtethetünk, hogy a frekvencia mint ilyen különbség állítható elő, azonban nem következtethetünk az A_i-k egyéb fizikai jelentésére és összefüggésére az energiával. Az (A) feltétel, melyet az új elmélet egyik alaptételének tekintünk, kevesebbet mond, mint a BOHR-féle frekvencia-feltétel (I).

2. §. A matrixkalkulus elemei.

Az előbb bevezetett kvantumelméleti alapváltozók mindegyike két állapottól függ. Ezért elrendezhetők egy kvadratikus szkémába úgy, hogy a kezdeti állapot sorszáma a sor számát, a végállapot sorszáma pedig az oszlop számát jelöli. Az igy elrendezett értékrendszert matrixnak nevezik és vastag betűvel jelölik

$$\boldsymbol{a} = \big(a(nm)\big) = \begin{pmatrix} a(0,0) & a(0,1) & a(0,2)\ldots \\ a(1,0) & a(1,1) & a(1,2)\ldots \\ a(2,0) & a(2,1) & a(2,2)\ldots \\ . & . & .\;.\;. \end{pmatrix} \tag{30}$$

A kvantumelméleti alapváltozók matrixa:

$$q = \left(q\,(n, m)\, e^{2\pi i \nu\,(nm)\,t}\right)$$

$$\text{hol } n, m = 0, 1, 2, \ldots \infty \qquad (31)$$

$$p = \left(p\,(n, m)\, e^{2\pi i \nu\,(nm)\,t}\right)$$

Ezen matrixok végtelen sok elemből állanak.

A matrixok fogalmának bevezetése módot nyujtott arra, hogy az azokra definiált formális műveleti szabályok segélyével a mechanika és elektrodynamika alaptörvényeit oly alakban fejezhessük ki, mely az elemi folyamatok kvantumszerű jellegének közvetlenül megfelel. A matrixkalkulus itt ugyanazt a szerepet tölti be, mint a tenzoranalizis a relativitás elméletében.

A matrixokkal való bánásmód megkönnnyítésére célszerű néhány alapműveletet bevezetni.

Két matrixot egyenlőnek tekintünk, ha a megfelelő helyen levő elemei megegyeznek.

Két matrix összege, illetőleg különbsége az a matrix, melynek elemei a két matrix megfelelő elemeinek összege, illetőleg különbsége.

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \boldsymbol{c} \qquad (32)$$

azt jelenti, hogy:

$$a\,(nm) \pm b\,(nm) = c\,(nm). \qquad (33)$$

Két matrix szorzata

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} . \boldsymbol{b} \qquad (34)$$

az a matrix, melynek az n-ik sorban és m-ik oszlopban levő elemét az első (matrix) tényező n-ik sorának a második (matrix) tényező m-ik oszlopának komponálásával kapjuk meg:

$$c\,(nm) = \sum_k a\,(nk)\; b\,(km). \qquad (35)$$

Több matrix szorzatának

$$\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}_1\, \boldsymbol{a}_2 \ldots \boldsymbol{a}_j \qquad (36)$$

elemei a következők:

$$c\,(nm) = \sum_{k_1, k_2 \ldots k_{j-1}} a_1\,(nk_1)\, a_2\,(k_1 k_2) \ldots a_j\,(k_{j-1} m) \qquad (37)$$

A szorzásnál az első és második tényező máskép szerepel és ezért a szorzás nem kommutatív művelet:

$$a.b \neq ba, \tag{38}$$

mert nyilván általában:

$$\sum_k a(nk)\,b(km) \neq \sum_k b(nk)\,a(km). \tag{39}$$

Fontos az egységmatrix, melynek diagonálisában csupa $+1$ áll, a többi eleme zérus

$$\mathbf{1} = (\delta_{nm}),\ \delta_{nm} = \begin{cases} 1 & n = m \\ & \text{ha} \\ 0 & n \neq m \end{cases} \tag{40}$$

azaz

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots \\ 0 & 1 & 0 \dots \\ 0 & 0 & 1 \dots \\ . & . & \dots . \end{pmatrix} \tag{41}$$

Az egységmatrixszal szorozva bármely más matrixot, az nem változik.

$$\mathbf{1}.a = a.\mathbf{1} = a. \tag{42}$$

Azt a matrixot, melylyel szorozva valamely a matrixot az egységmatrixot kapjuk, reciprok matrixnak nevezzük és a^{-1}-el jelöljük.

$$aa^{-1} = a^{-1}a = \mathbf{1}. \tag{43}$$

A következőkben mindig oly matrixok szerepelnek, melyek elemei egy exponenciális faktort tartalmaznak, mint a q és p matrixok és azoktól csak az együtthatókban térnek el. Ilyen matrix diagonális tagjai az időt nem tartalmazzák, mert $\nu(nn)=0$, a többi elem az idő periodikus függvénye. Egy ilyen matrix időszerinti középértéke egy oly matrix, melynek diagonálisában levő elemek a matrix elemeivel egyeznek meg, a többi elem zérus.

$$\bar{a} = \left(\delta_{nm}\, a(n.m)\right). \tag{44}$$

A diagonálisban levő tagok összegét így jelöljük:

$$D(a) = \sum_n a(nn). \tag{45}$$

A p és q matrixok függvényeinek azokat a matrixokat tekintjük, melyeket ezen matrixok összeadása, szorzása és általában formális hatványsora által előállíthatunk:

$$y = f(pq) = \sum_{i,j} a_{ij} p^i q^j. \tag{46}$$

Egy matrixot paraméter szerint úgy differenciálunk, hogy minden elemét differenciáljuk a paraméter szerint.

Egy matrixfüggvény egy matrix szerinti differenciálkvociense alatt értjük, pl.:

$$\frac{\partial y}{\partial p} = \lim_{\gamma=0} \frac{f(p + \gamma 1, q) - f(pq)}{\gamma}. \tag{47}$$

Ezt a differenciálást vastag törtvonallal jelölik, egyedül ezt fogjuk használni.

A p és q matrixok szorzata olyan $g = pq$ matrix, melynek elemei exponenciális kifejezései ugyanazt a $\nu(nm)$ frekvenciát tartalmazzák, mint p és q elemei. Ez az elemek speciális alakjából és az (A) alaptörvényből következik:

$$\Sigma p(nk)\, q(km)\, e^{2\pi it\{\nu(nk) + \nu(km)\}} = \Sigma g(nm)\, e^{2\pi it\nu(nm)}. \tag{48}$$

Ugyanez áll minden $g = g(pq)$ függvényre is és ezért sokszor eltekinthetünk az exponenciális tényezőtől és a matrixot a $p(nm)$, $q(nm)$ ill. $g(nm)$ együtthatókkal jellemezhetjük.

Egy ily matrix időszerinti deriváltja:

$$\dot{g} = 2\pi i \big(\nu(nm)\, g(nm)\big), \tag{49}$$

ha az exponenciális tényezőt elhagyjuk. Ha $\dot{g}$ zérus, úgy mivel $\nu(nm) = 0$, ha $n = m$ és $\nu(nm) \neq 0$, ha $n \neq m$ kell, hogy $g(nm)$ mindig zérus legyen, ha $n \neq m$, azaz g diagonális matrix, melynek csak diagonálisában lehetnek zérustól különböző elemei.

Ezen tételt a következőkben többször alkalmazni fogjuk.

3. §. Az alapegyenletek levezetése.

A stacionárius pályákat meghatározó (II) alapegyenlet megfelelő általánosítás után könnyen matrixegyenlet alakjában írható.

Mindig csak egy szabadsági fok esetére szorítkozunk, midőn a rendszer konfigurációját egy koordináta határozza meg és midőn a mozgás egyszerűen periodikus lehet csupán. Az impulzusokat és koordinátákat FOURIER-sorba fejtjük a klasszikus elmélet szerint:

$$q = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} q_\tau e^{2\pi i\nu\tau t}, \quad p = \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} p_\tau e^{2\pi i\nu\tau t}. \tag{50}$$

Ezeket a (II) egyenletbe behelyettesítjük, miután az integrált időszerinti integrállá alakítottuk, melyet egy teljes periódus tartamára $T = \frac{1}{\nu}$-re terjesztünk ki.

$$I = \oint p\,dq = \int_0^{\frac{1}{\nu}} p\dot{q}\,dt = nh. \tag{51}$$

Behelyettesítés után kiintegrálunk, midőn minden tag eltűnik az exponenciális periodicitására való tekintettel, melynek exponense zérustól különbözik és marad:

$$I = 2\pi i \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \tau q_\tau p_{-\tau}. \tag{52}$$

Differenciálva mindkét oldalt I szerint:

$$1 = 2\pi i \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \tau \frac{\partial}{\partial I}(q_\tau p_{-\tau}). \tag{53}$$

Ez az egyenlet nem más, mint a (II) kvantumfeltétel a FOURIER-sor együtthatóira kimondva, avval tartalmilag megegyezik.

Ezen alak azonban alkalmas általánosításra. A korrespondencia elvének megfelelően a differenciálhányadost differenciahányadossal helyettesítjük és ezáltal már tartalmilag új feltételt kapunk. Még pedig $\tau \frac{\partial}{\partial I}$ helyébe egy olyan differenciahányadost teszünk, melyben a számlálóban két tag különbsége áll, úgy, hogy az első tag kvantumszáma τ-val nagyobb, mint a másodiké. A nevező h a PLANCK-féle állandó. q_τ és $p_{-\tau}$ helyébe a megfelelő kvantumelméleti mennyiségek jönnek, melyeknél a sorszám a kezdeti állapottól a végállapotba való átmenetnél τ, illetőleg $-\tau$-val fogy. Tehát q_τ helyébe jön $q\,(n+\tau,\, n)$, $p_{-\tau}$ helyébe $p\,(n,\, n+\tau)$ és így lesz:

$$1 = 2\pi i \frac{1}{h} \sum_{\tau=-\infty}^{+\infty} \{q\,(n+\tau, n)\, p\,(n, n+\tau) - q\,(n, n-\tau)\, p\,(n-\tau, n)\}. \qquad (54)$$

Bevezetve az első tagba $n+\tau=k$, a másodikba $n-\tau=k$ összegezési betűt és mindegyiket tekintettel arra, hogy $-\infty$-tól $+\infty$-ig minden értéket felvesznek, ugyanazon betűvel jelölve:

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \{p\,(nk)\, q\,(kn) - q\,(nk)\, p\,(kn)\} = \frac{h}{2\pi i} \cdot \qquad (\mathrm{II}')$$

Ha q derékszögű koordináta, úgy $p=mq$, hol m a pont tömege, a következő egyszerűbb egyenletet kapjuk:

$$\Sigma \nu\,(kn)\, |\, q\,(nk)\,|^2 = \frac{h}{8\pi^2 m} \cdot \qquad (55)$$

A (II) kvantumfeltétel helyébe (II') lép. Ez végtelen sok egyenletet jelent, mert minden n-re fennáll. A baloldal nem más, mint $\mathbf{pq} - \mathbf{qp}$ matrix diagonálisának tagja és ezért matrixegyenlet alakjában írható:

$$\mathbf{pq} - \mathbf{qp} = \mathbf{1} \frac{h}{2\pi i} \cdot \qquad (B)$$

Ez a feltétel egy szabadsági fok esetében az új kvantumelmélet második alapfeltétele.

Több f szabadsági fok esetében a (B) feltételek közelfekvő általánositása a következő:

$\mathbf{p}$ és $\mathbf{q}$ helyébe lépnek

$\mathbf{p}_k$, $\mathbf{q}_k$, $k = 1, 2, \ldots f$ matrixok és (B) helyébe:

$$\left.\begin{aligned} p_k q_l - q_l p_k &= \frac{h}{2\pi i}\,\delta_{kl} \\ p_k p_l - p_l p_k &= 0 \\ q_k q_l - q_l q_k &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (B')$$

egyenletek, hol

$$\delta_{kl} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \text{ha} \begin{cases} k = l \\ k \neq l \end{cases}$$

A mechanika mozgási egyenleteit helyettesítő matrixegyenleteket megkapjuk, ha a klasszikus mechanika HAMILTON-féle elvét vagy az abból közvetlenül adódó kanonikus egyenleteket megfelelően általánosítjuk. E célból a HAMILTON-féle függvény kifejezésébe $H(pq)$-ba p és q helyébe a megfelelő matrixot teszünk és így a klasszikus mechanika kanónikus egyenleteivel formálisan teljesen megegyező matrixegyenleteket kapunk.

$$\dot{q} = \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{p}} \quad \dot{p} = -\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial \boldsymbol{q}}. \qquad (C)$$

Itt

$$\boldsymbol{H} = \left(H(n, m)\, e^{2\pi i \nu (nm) t}\right)$$

matrix és a baloldal

$$\left(2\pi i\nu(nm)\, q(nm)\, e^{2\pi i\nu(nm)t}\right), \text{ ill. } \left(2\pi i\nu(nm)\, p(nm)\, e^{2\pi i\nu(nm)t}\right)$$

matrix. Ezen matrixokban elhagyva az exponenciálisokat, az együtthatók számára végtelen sok egyenletből álló rendszert kaptunk.

Az új kvantumelméleti mechanika alaptörvényeit az (A), (B), (C) egyenletek tartalmazzák.

4. §. Az energia tétele és a Bohr-féle frekvenciatétel levezetése.

A (B) alaptörvények tekintetbevételével az elmélet felépítésére fontos relációk vezethetők le. Ha $f(\boldsymbol{pq})$ a $\boldsymbol{p}$ és $\boldsymbol{q}$ matrixok egy matrixfüggvénye, úgy fennáll:

$$fq - qf = \frac{\partial f}{\partial p}\frac{h}{2\pi i}$$
$$pf - fp = \frac{\partial f}{\partial q}\frac{h}{2\pi i}. \tag{56}$$

Ezeket az egyenleteket igaznak tételezve fel két φ és ψ matrix-függvényre, az igaz azok összegére és szorzatára is. Az összegre triviális, a szorzatra $\varphi.\psi$-re lesz az első egyenlet:

$$\varphi\psi.q - q\varphi\psi = \varphi(\psi q - q\psi) + (\varphi q - q\varphi)\psi$$
$$= \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial p} + \frac{\partial\varphi}{\partial p}\psi\right)\frac{h}{2\pi i} = \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial p}\frac{h}{2\pi i}. \tag{57}$$

Hasonlóan a második egyenlet is. Az (56) egyenlet a (B) törvény szerint érvényes p és q-ra és így bármely függvényre, melyet q és p szerinti hatványsor definiál.

Ezen segédtétel segélyével az alaptörvényekből a frekvenciatételt és energiatételt levezethetjük. A kombináció-elvből (A) kapjuk a frekvenciák számára azok előállítását, mint állapotfüggvények különbségét:

$$\nu(nm) = A_n - A_m. \tag{29}$$

Fogjuk fel az A_n-ket, mint egy $\boldsymbol{A}$ diagonális-matrix elemeit:

$$\boldsymbol{A} = \big(A(nm)\big) \text{ hol } A(nm) = \begin{cases} A_n & n = m \\ & \text{ha} \\ 0 & n \neq m. \end{cases} \tag{58}$$

Ekkor bármilyen «kvantumelméleti», azaz

$$\boldsymbol{a} = \left(a(nm)\,e^{2\pi i\nu(nm)t}\right)$$

alakú matrixra fennáll:

$$\dot{\boldsymbol{a}} = 2\pi i(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\boldsymbol{A}), \tag{59}$$

mert:

$$\dot{\boldsymbol{a}} = \left(2\pi i\nu(nm)\,a(nm)\,e^{2\pi i\nu(nm)t}\right) \tag{49}$$

alkalmazva (29) egyenletet és elhagyva az exponenciálist:

$$\begin{aligned}\dot{a} &= 2\pi i\big((A_n - A_m)\, a(nm)\big) \\ &= 2\pi i\big(A(nn)\, a(nm) - a(nm)\, A(mm)\big) \\ &= 2\pi i\,(\boldsymbol{A}\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}\boldsymbol{A}).\end{aligned} \tag{60}$$

Fejezzük ki a kanonikus egyenletek baloldalát (59) tétel, jobboldalát (56) egyenletek segélyével, úgy lesz:

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{A}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}\boldsymbol{A} &= \frac{1}{h}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{q} - \boldsymbol{q}\boldsymbol{H}) \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}\boldsymbol{A} &= \frac{1}{h}(\boldsymbol{H}\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}\boldsymbol{H}),\end{aligned}\right\} \tag{61}$$

innen következik, hogy

$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{H}}{h}, \tag{62}$$

azaz:

$$\nu(nm) = \frac{H_n - H_m}{h}. \tag{63}$$

Másrészt fennáll (61) szerint:

$$\left.\begin{aligned}\left(\boldsymbol{A} - \frac{\boldsymbol{H}}{h}\right)\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}\left(\boldsymbol{A} - \frac{\boldsymbol{H}}{h}\right) = 0 \\ \left(\boldsymbol{A} - \frac{\boldsymbol{H}}{h}\right)\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}\left(\boldsymbol{A} - \frac{\boldsymbol{H}}{h}\right) = 0.\end{aligned}\right\} \tag{64}$$

A zárójelben levő tag $\boldsymbol{p}$ és $\boldsymbol{q}$ matrixokkal elülről és hátulról való szorzással ugyanazon eredményt adja, tehát velük felcserélhető a szorzásnál.

Ekkor fennáll

$$\left(\boldsymbol{A} - \frac{\boldsymbol{H}}{h}\right)\boldsymbol{q}^j = \boldsymbol{q}^j\left(\boldsymbol{A} - \frac{\boldsymbol{H}}{h}\right) \tag{65}$$

és általában $\left(\boldsymbol{A} - \frac{\boldsymbol{H}}{h}\right)$ $\boldsymbol{p}$ és $\boldsymbol{q}$ minden függvényével a szorzás sorrendjétől függetlenül ugyanazt az eredményt adja. Ha ily függvénynek $\boldsymbol{H}$-t választjuk, lesz:

$$\left(\boldsymbol{A} - \frac{\boldsymbol{H}}{h}\right)\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{A} - \frac{\boldsymbol{H}}{h}\right) = 0, \tag{66}$$

azaz:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}\boldsymbol{A} = 0, \tag{67}$$

ez pedig (59) egyenlet szerint azt jelenti, hogy

$$\dot{H} = 0, \tag{68}$$

azaz az energia tétele fennáll.

Továbbá (49) szerint fennáll, hogy

H diagonális matrix.

Az energia diagonális matrix. A diagonálisban levő tagjai az egyes stacionárius állapotok energiái. Ha ezeket ismerjük, úgy a frekvenciákat a Bohr-féle frekvenciatétel szolgáltatja. A sugárzás intenzitásának és a polárossági viszonyok meghatározására a $q(nm)$ $p(nm)$ együtthatókat kell (A), (B), (C) egyenletek segélyével meghatározni. Ha ez is meg van oldva, úgy a stacionárius állapotok energiája és az átmenetek valószínűsége ismeretes. Az a kérdés, hogy mit csinál az elektron két stacionárius pálya közt, itt fel sem merül, mert eleve csak a stacionárius állapotok sorát vettük tekintetbe. Két állapot közti állapotról csak akkor lehet szó, ha az állapotokat valami elv szerint, pl. az energia nagysága szerint rendeztük és nem «szomszédos» állapotokról van szó. Az egész kérdés, úgy látszik, a nem folytonos valóságra a folytonosság fogalmainak nem jogosult átviteléből ered, mely csak akkor jogosult approximáció, ha oly változásokról van szó, melyek sok elemi állapotkülönbséget foglalnak magukba. Éppigy nem utasítható eleve el az a gondolat sem, hogy a helyzetbeli különbségek is egy összrendszer állapotkülönbségeinek foghatók fel és hogy az elektron pályájára, abban levő helyzetére vonatkozó részletesebb kérdések, mint a térbeli szkémának nem jogosult átvitelei elemi jelenségekre, értelemmel nem bírnak. Úgy látszik, hogy az új elmélet mélyreható eltolódást fog abban is előidézni, hogy mit tekintsünk tulajdonképpen fizikai realitásnak.

Eltekintve ezen általános szempontoktól, felemlítjük, hogy az új elmélet mindazt megadja, amit a régi kvantumelmélet, csak sokkal egységesebb szempontból. A kiválasztási elveket az azimutális, belső és mágneses kvantumszámokra, a polárosság törvényeit, a ZEEMAN-effektus komponenseinek intenzitási törvényeit szolgáltatja. Az utóbbiakat a régi kvantumelmélet csak új ad hoc feltevésekkel tudta megadni, itt nincs ezekre szükség.

Az elektromágneses tér törvényei is matrixegyenletekkel jellemezhetők. Ugyanis felfoghatjuk az elektromágneses teret, mint sík hullámok összetételét. Minden sík hullámot harmonikus komponensekre bontunk FOURIER-sorba fejtés által. Ezen együtthatók képezik az elektromágneses tért jellemző matrix elemeit. Az elmélet a PLANCK-féle sugárzás törvényeit és a sugárzási ingadozások helyes értékét szolgáltatja.

5. §. Mathematikai eljárások. A perturbáció elmélete és alkalmazása a diszperzió elméletére, valamint a harmonikus és anharmonikus oscillátorra.

Az új kvantumelméleti mechanikában a klasszikus mechanika kanonikus egyenleteinek integrálására szolgáló módszereinek itt is bizonyos eljárások felelnek meg, melyek sok esetben célhoz vezetnek és melyeket nagy vonásokban vázolok, mert egyrészt érdekes az analogia a klasszikus mechanika módszereihez, másrészt fogalmat nyujt a matrixokkal való bánásmódról.

Ha a problémát meg tudjuk oldani $\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{pq})$ energiafüggvény esetében úgy, hogy a megoldások $\boldsymbol{p}_0$, $\boldsymbol{q}_0$ matrixok, melyek a $\boldsymbol{p}_0\boldsymbol{q}_0-\boldsymbol{q}_0\boldsymbol{p}_0=\frac{h}{2\pi i}\boldsymbol{1}$ egyenletet kielégítik és az energiamatrixot diagonális matrixszá alakítják, úgy sokszor lehetséges egy oly probléma megoldása, melynek energiafüggvénye attól kissé tér el.

Legyen az energiafüggvény egy λ paraméter szerinti sorba fejtve:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{pq})=\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{pq})+\lambda\boldsymbol{H}_1(\boldsymbol{pq})+\lambda^2\boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{pq})+\cdots \qquad (69)$$

mely $\lambda=0$ esetben az előbbi problémára vezet vissza. Ez a perturbáció elmélet általános problémája.

Úgy mint a klasszikus mechanikában a kanonikus transzformáció elmélete módot nyujt új változók bevezetésére, melyek a kanonikus egyenletek alakját nem változtatják meg és néha a probléma megoldását lehetővé teszik, itt is vezethetünk be új változókat, melyek hasonló sajátságokkal bírnak. Kanonikus transzformációnak oly transzformációt nevezünk itt, melyek (B) relációt változatlanul hagyják. Tehát ha $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ helyébe $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ matrixokat vezetjük be, kell hogy fennálljon:

$$\boldsymbol{pq}-\boldsymbol{qp}=\boldsymbol{PQ}-\boldsymbol{QP}=\frac{h}{2\pi i}\boldsymbol{1}. \tag{70}$$

Ekkor, amint a frekvencia és energiatétel segélyével könnyen kimutatható, $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{Q}$ számára a kanonikus egyenletek is érvényben vannak.

Egy ilyen transzformáció, mely ezen feltételeknek eleget tesz, a következő:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}&=\boldsymbol{SpS}^{-1}\\ \boldsymbol{Q}&=\boldsymbol{SqS}^{-1}\end{aligned} \tag{71}$$

hol $\boldsymbol{S}$ egy tetszőleges «kvantumelméleti» matrix és $\boldsymbol{S}^{-1}$ az előbbi reciprokja.

Alkalmazva (B) feltételre, lesz:

$$\boldsymbol{S}\,(\boldsymbol{pq}-\boldsymbol{qp})\,\boldsymbol{S}^{-1}=\frac{h}{2\pi i}\,\boldsymbol{SS}^{-1}, \tag{72}$$

azaz

$$\boldsymbol{SpS}^{-1}\,\boldsymbol{SqS}^{-1}-\boldsymbol{SqS}^{-1}\,\boldsymbol{SpS}^{-1}=\boldsymbol{PQ}-\boldsymbol{QP}=\frac{h}{2\pi i}\,\boldsymbol{1}, \tag{73}$$

tekintetbe véve, hogy $\boldsymbol{SS}^{-1}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S}=1$.

Hasonlóan kimutatható, hogy ezen transzformáció által minden $f(\boldsymbol{pq})$ függvény az új változók ugyanazon alakú függvényébe megy át:

$$\boldsymbol{S}f(\boldsymbol{pq})\,\boldsymbol{S}^{-1}=f(\boldsymbol{PQ}). \tag{74}$$

Egy energiafüggvény által: $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{pq})$ definiált problémánál az integráció problémáját a következő problémára vezethetjük vissza: Ha adva vannak p_0, q_0 matrixok, melyek a (B) feltételt kielégitik, olyan S matrixot kell keresni, mellyel

$$p = S p_0 S^{-1},\ q = S q_0 S^{-1} \tag{75}$$
$$H(p, q) = S H(p_0 q_0) S^{-1} = W \tag{76}$$

diagonális matrix lesz. Ezen (76) egyenlet a klasszikus elmélet HAMILTON—JACOBI-féle parciális differenciálegyenletének felel meg.

Ha az energiafüggvényt (69) egyenlet határozza meg és ha $H_0(pq)$ esetben a problémát megoldottuk $p_0 q_0$-al, úgy a következőkép határozzuk meg S-t.

Fejtsük ki S-t λ szerinti sorba:

$$S = 1 + \lambda S_1 + \lambda^2 S_2 + \cdots \tag{77}$$

Ekkor lesz:

$$S^{-1} = 1 - \lambda S_1 + \lambda^2 (S_1^2 - S_2) + \cdots \tag{78}$$

Éppígy W-t is sorba fejtjük

$$W = W_0 + \lambda W_1 + \lambda^2 W_2 + \cdots \tag{79}$$

Ezeket behelyettesitve (76) egyenletbe λ megfelelő hatványai együtthatóinak mindkét oldalt meg kell egyezni. Ebből a következő egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} H_0(p_0 q_0) &= W_0 \\ S_1 H_0 - H_0 S_1 + H_1 &= W_1 \\ S_2 H_0 - H_0 S_2 + H_0 S_1^2 - S_1 H_0 S_1 + S_1 H_1 - H_1 S_1 + H_2 &= W_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ S_r H_0 - H_0 S_r + F_r (H_0 \ldots H_r, S_0 \ldots S_{r-1}) &= W_r \end{aligned} \tag{80}$$

Itt $H_0 \ldots H_r$-ben a változók $p_0 q_0$.

Az első egyenlet ki van elégítve, a többi sorba megoldható úgy, mint a klasszikus elméletben.

Az (59) egyenlet és $A = \frac{H}{h}$ tekintetbevételével lesz:

$$\begin{aligned} S_r H_0 - H_0 S_r &= -\dot{S}_r \frac{h}{2\pi i} \\ \dot{S}_r &= \left(2\pi i \nu (n\,m)\, S_r\,(nm)\, e^{2\pi i \nu (nm) t}\right) \\ S_r H_0 - H_0 S_r &= -h\left(\nu (nm)\, S_r\,(nm)\right) \end{aligned} \tag{81}$$

elhagyva az exponenciálist.

Ha most az egyenletekben időbeli középértéket képezünk és tekintetbe vesszük, hogy W diagonális matrix és hogy minden kvantumelméleti matrix időbeli középértékénél csak a diagonális tagok maradnak meg és

$$\nu (nn)\, S_r\,(nn) = 0 \tag{83}$$

$$W_r = \overline{F}_r \tag{84}$$

$$S_r\,(nm) = \frac{F_r\,(nm)}{h\nu\,(nm)}(1 - \delta_{nm}). \tag{85}$$

Első közelítésben:

$$W_1 = \overline{H}_1 \tag{86}$$

$$S_1\,(nm) = \frac{H_1\,(nm)}{h\nu\,(nm)}(1 - \delta_{nm}) \tag{87}$$

és az energia második közelítésben:

$$W_2 = \overline{H}_2 + \frac{1}{h}\sum{}' \frac{H_1\,(nl)\, H_1\,(ln)}{\nu_0\,(nl)}, \tag{88}$$

hol a vessző az összegjelnél arra figyelmeztet, hogy az a tag, melynél $l = n$, kihagyandó.

A koordináták lesznek:

$$\begin{aligned} q &= q_0 + \lambda q_1 + \lambda^2 q_2 + \cdots \\ p &= p_0 + \lambda p_1 + \lambda^2 p_2 + \cdots \end{aligned} \tag{89}$$

Az első közelítésben lesz:

$$\begin{aligned} q_1 &= S_1 q_0 - q_0 S_1 \\ p_1 &= S_1 p_0 - p_0 S_1 \end{aligned} \tag{90}$$

és S_1 fenti értékeit tekintetbe véve részletesen:

$$
\begin{aligned}
q_1(nm) &= \frac{1}{h}\sum{}' \left\{ \frac{H_1(nk)\, q_0(km)}{\nu_0(nk)} - \frac{q_0(nk)\, H_1(km)}{\nu_0(km)} \right\} \\
p_1(nm) &= \frac{1}{h}\sum{}' \left\{ \frac{H_1(nk)\, p_0(km)}{\nu_0(nk)} - \frac{p_0(nk)\, H_1(km)}{\nu(km)} \right\}
\end{aligned} \tag{91}
$$

Ezek a formulák egy külső erő behatását szolgáltatják, ha az nem vagy igen lassan változik az idővel.

Nagy fontossággal bir az az eset, ha a külső behatás az időnek periodikus függvénye, pl. egy monochromatikus fényhullám. Ezen esetben a diszperzió elméletét kaphatjuk meg annak KRAMERS-féle alakjában.

Vegyük azt az esetet tekintetbe, hogy a rendszer egy ν_0 frekvenciájú monochromatikus hullám hatásának van kitéve, melyben az elektromos vektor az x tengely irányában rezeg.

$$\mathfrak{E}_x = E \cos 2\pi\nu_0 t = E\tfrac{1}{2}(e^{2\pi i\nu_0 t} + e^{-2\pi i\nu_0 t}). \tag{92}$$

Ha minden atómban csak egy a pozitiv mag körül keringő elektron járul számottevően hozzá az elektromos momentum létesítéséhez, úgy az elektromos momentum x-komponense eq_0 és a hullám az elektronon a következő munkát végzi:

$$H_1 = eq_0\mathfrak{E}_x = \tfrac{1}{2} eEq_0 (e^{2\pi i\nu_0 t} + e^{-2\pi i\nu_0 t}) \tag{93}$$

és beirva q_0 helyébe a megfelelő matrixot:

$$H_1(nm) = \tfrac{1}{2} eEq_0(nm)\left\{e^{2\pi i(\nu(nm)+\nu_0)t} + e^{2\pi i(\nu(nm)-\nu_0)}\right\}. \tag{94}$$

$H_1(n, m)$ helyébe két mennyiség lép, amelyeket $H_1(n, m; +1)$ és $H_1(n, m; -1)$-el jelölünk a szerint, amint a megfelelő kitevőben $\nu(nm)+\nu_0$ vagy $\nu(nm)-\nu_0$ fordul elő. Minden kvantumelméleti mennyiség helyébe két ily mennyiség lép.

Így lesz:

$$
\begin{aligned}
H_1(n, m; +1) &= \tfrac{1}{2} Eeq_0(n, m) \\
H_1(n, m; -1) &= \tfrac{1}{2} Eeq_0(n, m).
\end{aligned} \tag{95}
$$

És megfelelően (87) egyenletnek:

$$S_1(n, m; \pm 1) = \frac{Ee}{2h}\,\frac{q_0(nm)}{\nu_0(nm) \pm \nu_0}. \tag{96}$$

A koordináta általános alakja lesz:

$$q_1(nm;\pm 1)\, e^{2\pi i\,(\nu(nm)\pm\nu_0)\,t}, \tag{97}$$

hol (91) szerint

$$q_1(n, m: \pm 1) = \frac{Ee}{2h}\sum_k \left\{ \frac{q_0(nk)\, q_0(km)}{\nu_0(nk)\pm\nu_0} - \frac{q_0(nk)\, q_0(km)}{\nu_0(km)\pm\nu_0} \right\}. \tag{98}$$

Derékszögű koordináták esetében $p = \mu\dot{q}$, ha μ az elektron tömege, lesz:

$$q_1(n, m; \pm 1) = \frac{Ee}{2h.2\pi i\mu}\sum_k \frac{q_0(nk)\, p_0(km) - p_0(nk)\, q_0(km)}{\left(\nu_0(nk)\pm\nu_0\right)\left(\nu_0(km)\pm\nu_0\right)} \tag{99}$$

Abban az esetben, ha a beeső fény frekvenciája igen magas az atóm frekvenciáihoz képest $|\nu_0| >> |\nu_0(nk)|$, úgy első közelítésben lesz:

$$q_1 = -\frac{Ee}{h.2\pi i\nu_0^2\mu}\,(p_0q_0 - q_0p_0)\cos 2\pi\nu_0 t \tag{100}$$

és (B) alapfeltevés tekintetbevételével:

$$q_1 = \frac{Ee}{4\pi^2\mu\nu_0^2}\cos 2\pi\nu_0 t. \tag{101}$$

Azaz igen magas frekvenciánál, mint Röntgen-sugaraknál, az elektron úgy viselkedik, mintha szabad volna.

A (98), illetőleg (99) egyenlet szerint olyan hullámok is fellépnek, melyek frekvenciája eltér a beeső fény frekvenciájától. Ezek a töréshez, illetőleg diszperzióhoz nem járulnak hozzá, csak a szétszórt fényben mutathatók ki és melyek fellépte jellemző a Kramers-féle diszperzió elméletre. Meg kell azonban jegyezni, hogy ilyen hullámok akkor is fellépnek, ha a klaszszikus elméletben egy keringő elektron sugárzását vizsgáljuk külső sugárzás hatása alatt.[1]

---

[1] M. Born: Zeitschr. f. Phys. 26. 389. lap. 1924.

ν_0 frekvenciával bírnak a diagonális elemei, ezek mérvadók a diszperzióra. Ezeknél lesz:

$$q\,(nn, +1)\, e^{2\pi i \nu_0 t} + q\,(nn, -1)\, e^{-2\pi i \nu_0 t} =$$
$$= \frac{eE}{h} \cos 2\pi\nu_0 t \cdot \sum \frac{|q_0\,(nk)|^2\, \nu\,(nk)}{\nu^2\,(nk) - \nu_0^2} = \mathfrak{E} \sum \frac{f_k}{\nu^2\,(nk) - \nu_0^2}. \tag{102}$$

A törésmutató az elektromágnes fényelmélet szerint a dielektromos állandó négyzetgyöke

$$n = \sqrt{\varepsilon}$$

és a dielektromos állandó itt tetszőleges frekvenciánál az első MAXWELL-féle egyenletben:

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \tag{103}$$

a $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$ együtthatóját jelenti. Ennek értelméhez az elektronelmélet szerint eljutunk, ha kiindulunk a vakuumra érvényes alapegyenletből, de tekintetbe vesszük a test elektronjainak hatását. Az alapegyenlet

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \varrho \mathfrak{v}, \tag{104}$$

hol ϱ a térfogategység töltése, $\mathfrak{v}$ sebessége.

Ha csak a negatív elektronok mozognak számottevően és számuk a térfogategységben $\mathfrak{N}$, úgy:

$$\varrho \mathfrak{v} = \mathfrak{N} e \dot{q}. \tag{105}$$

Ha a (104) egyenletet matrixegyenletnek fogjuk fel, mely minden harmonikus komponensre érvényes és csak a diagonális tagokra szorítkozunk, úgy (105)-be $\dot{q}$ helyébe (102) kifejezést téve:

$$\varrho \mathfrak{v} = \mathfrak{N} e \sum_k \frac{f_k}{\nu^2\,(nk) - \nu_0^2} \cdot \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \tag{106}$$

azaz

$$\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} + \varrho \mathfrak{v} = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \left\{ 1 + \sum_k \frac{\mathfrak{N} e f_k}{\nu^2\,(nk) - \nu_0^2} \right\} = \varepsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}. \tag{107}$$

A törésmutató tehát:

$$n = \left[1 + \sum \frac{\mathfrak{Re} f_k}{\nu^2(nk) - \nu_0^2}\right]^{1/2}. \qquad (108)$$

Ez megfelel a diszperzió ismert képleteinek, melyeknél az atóm saját rezgései: $\nu(nk)$ környezetében a törésmutató nagy értéket vesz fel.

A perturbációs elmélet itten követett módszerein kívül, mely a klasszikus mechanikában követett eljárásokhoz szorosan csatlakozik, egy más eljárás az energiamatrix diagonális matrixszá való transzformálásának kérdését végtelen sok változás kvadratikus (Hermite-féle formák) főtengelyeire való transzformálásával orthogonális substitució segélyével hozza kapcsolatba. Ez az eljárás annyival általánosabb eredményt szolgáltat, mint a perturbációs eljárás, hogy a megoldásban bizonyos határozatlan állandók lépnek fel, melyek a fázist jelentik és amelyekre a perturbációs eljárásnál egy speciális, nevezetesen zérus érték adódott.

Végtelen kvadratikus formák főtengelyekre való transzformálásánál az a nevezetes különbség lép fel véges kvadratikus formákkal szemben, hogy a végtelen kvadratikus forma nem minden esetben állítható elő mint négyzetösszeg, hanem az előállítás egy integrált is tartalmaz. Ez összefügg avval a körülménnyel, hogy egy ily formához tartozó «Eigenwert»-ek spektruma általában nemcsak diszkrét értékek sokaságából, hanem azonkívül folytonos spektrumból is áll. Ez pedig összefüggésben áll az optikában fellépő folytonos spektrumokkal, mint a hydrogénnél a vonalas spektrumhoz csatlakozó folytonos színképpel. Ezen spektrumok tanulmányozása még meglehetős kezdeti állapotban van.

Közölni fogjuk ezen eljárások eredményét a harmonikus és anharmonikus oscillátor esetében.

A harmonikus lineáris oscillátor egy elektron, mely egyensúlyi helyzetéhez rugalmas erőkkel van kötve, azaz a reá ható erő arányos a kitéréssel. Ha a tömegét az egységnek választjuk, derékszögű koordinátákat vezetünk be és a koordináták és impulzusok helyébe a megfelelő matrixot tesszük, az energia kifejezése a következő:

$$H = \tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}\omega_0^2 q^2 \tag{109}$$

hol: $p = \dot{q}$, $\omega_0 = 2\pi\nu_0$.

A mozgásegyenlet lesz:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \tag{110}$$

Beírva ide q matrix elemeit:

$$q = \left(q\,(nm)\; e^{2\pi i \nu (nm) t}\right) \tag{111}$$

$$\left(\nu^2 (nm) - \nu_0^2\right) q\,(nm) = 0. \tag{112}$$

Ezekből (B) feltétel, illetőleg (55) egyenlet tekintetbevételével kimutatható, hogy

$$q\,(n, n \pm 1) = \frac{h}{8\pi^2 \nu}(n \pm 1) = c\,(n \pm 1) \tag{113}$$

$$\nu\,(n, n \pm 1) = \nu_0 \tag{114}$$

$$H\,(nn) = W_n = \nu_0\,(n + {}^1\!/_2). \tag{115}$$

A q matrix a következő:

$$q = e^{2\pi i \nu_0 t}\begin{pmatrix} 0 & c & 0 & 0 & . & . \\ c & 0 & 2c & 0 & . & . \\ 0 & 2c & 0 & 3c & . & . \\ 0 & 0 & 3c & 0 & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \tag{116}$$

Az anharmonikus oscillátornál az erő nem arányos a kitéréssel és így az energia kifejezésébe magasabb hatványok is belépnek

$$H = \tfrac{1}{2}p^2 + \tfrac{1}{2}\omega_0^2 q^2 + \tfrac{1}{3}\lambda q^3. \tag{117}$$

A mozgásegyenlet lesz:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q + \lambda q^2 = 0 \tag{118}$$

vagy a matrix elemeire kiírva:

$$\left(\omega_0^2 - \omega^2 (nm)\right) q\,(nm) + \lambda \Sigma q\,(nk)\, q\,(km) = 0. \tag{119}$$

Ezen esetre a perturbáció elmélet alkalmazható úgy, hogy:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \lambda H_1 \\ H_0 &= \tfrac{1}{2} p^2 + \tfrac{1}{2} \omega_0^2 q^2 \\ H_1 &= \tfrac{1}{3} q^3. \end{aligned} \tag{120}$$

Az eredmény a következő:

$$\begin{aligned} H(nn) &= h\nu_0 (n + {}^1\!/_2) - \lambda^2 \frac{5}{3} \frac{c^2}{\omega_0^2} \left(n(n+1) + \frac{17}{30} \right) + \cdots \\ \omega(n, n-1) &= \omega_0 - \lambda^2 \frac{5}{3} \frac{c^2}{\omega_0^2} 2n + \cdots \\ \omega(n, n-2) &= 2\omega_0 + \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ q(nn) &= -\lambda \frac{c}{\omega_0^2} (2n+1) + \cdots \\ q(n, n-1) &= \sqrt{c.n}.e^{i\varphi_{n-1}} \left(1 + \lambda^2 \frac{11}{18} \frac{cn}{\omega_0^4} + \cdots \right) \\ q(n, n-2) &= \lambda \frac{c}{3\omega_0^2} \sqrt{n(n-1)}\, e^{i(\varphi_{n-1} + \varphi_{n-2})} + \cdots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{121}$$

hol φ_{n-1}, φ_{n-2} a fázist meghatározó, határozatlan állandók.

Az eredménynél kiemelendő, hogy a kvantumszámok az első közelítésben $n + {}^1\!/_2$ alakban fordulnak elő, tehát a látszólagos fél kvantumszámok az elmélet alapjaiból külön feltevés nélkül következnek.

6. §. A kiválasztási elvek.

A kiválasztási elveket, melyek az impulzusmomentum lehetséges változásaira rónak ki korlátozásokat és az átmenethez tartozó sugárzás természetét határozzák meg, az új elmélet alapfeltevéseiből levezethetjük.

Az impulzusmomentum komponensei derékszögű koordinátákban a következő matrixok:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M}_x &= \sum_{k=1}^{f/3} (\boldsymbol{p}_{ky} \boldsymbol{q}_{kz} - \boldsymbol{q}_{ky} \boldsymbol{p}_{kz}) \\ \boldsymbol{M}_y &= \sum_{k=1}^{f/3} (\boldsymbol{p}_{kz} \boldsymbol{q}_{kx} - \boldsymbol{q}_{kz} \boldsymbol{p}_{kx}) \qquad (122) \\ \boldsymbol{M}_z &= \sum_{k=1}^{f/3} (\boldsymbol{p}_{kx} \boldsymbol{q}_{ky} - \boldsymbol{q}_{kx} \boldsymbol{p}_{ky}) \end{aligned}$$

Itt csak avval az alkalmazásaiban is fontos esettel foglalkozunk, midőn van egy irány, mely körül a rendszert elforgatva a potenciális energia nem változik és az erők forgató momentumának megfelelő komponense eltűnik, a megfelelő impulzusmomentum pedig állandó lesz. Ez az eset áll be, ha homogén elektromos vagy mágneses tér hatásának tesszük ki a rendszert, a kitüntetett irány az erő iránya. Ezt z tengelynek választva, lesz:

$$\dot{\boldsymbol{M}}_z = 0,$$

azaz $\boldsymbol{M}_z$ diagonális matrix, a diagonális elemei az atóm impulzusmomentumai a z tengely körül a különböző stacionárius állapotokban.

Ekkor fennáll (122) szerint:

$$\boldsymbol{q}_{lz}\boldsymbol{M}_z - \boldsymbol{M}_z\boldsymbol{q}_{lz} = 0. \qquad (123)$$

Ugyanis beírva $\boldsymbol{M}_z$ értékeit és tekintetbe véve, hogy $\boldsymbol{q}_{lx}$ és a többi tényezők sorrendje (B') egyenletek szerint felcserélhető, $\boldsymbol{M}_z$ és $\boldsymbol{q}_{lz}$ is felcserélhetők. Mivel $\boldsymbol{M}_z$ diagonális matrix, egyenletünk elemeire kiírva a következő:

$$q_{lz}(nm)\,(M_{zn} - M_{zm}) = 0, \qquad (124)$$

hol rövidség kedvéért $M_{zn} = M_z(nn)$.

Ha $M_{zn} \neq M_{zm}$, úgy szükségképen $q_{lz} = 0$, azaz a rezgés z komponense eltűnik és a rezgés síkja merőleges a z tengelyre.

Továbbá lesz:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{q}_{lx}\boldsymbol{M}_z - \boldsymbol{M}_z\boldsymbol{q}_{lx} = \sum_{k=1}^{f/3} (&\boldsymbol{q}_{lx}\boldsymbol{p}_{kx}\boldsymbol{q}_{ky} - \boldsymbol{q}_{lx}\boldsymbol{q}_{kx}\boldsymbol{p}_{ky} \\ &- \boldsymbol{p}_{kx}\boldsymbol{q}_{ky}\boldsymbol{q}_{lx} + \boldsymbol{q}_{kx}\boldsymbol{p}_{ky}\boldsymbol{q}_{lx}). \end{aligned} \qquad (125)$$

Azon tagokban, melyeknél $l \neq k$, q_{lx} és másik tényező sorrendje felcserélhető és így mint előbb zérust kapunk. Ha $l = k$, úgy tekintetbe véve az y és x indexű tényezők sorrendjének felcserélhetőségét (B') szerint lesz:

$$(q_{lx}p_{lx} - p_{lx}q_{lx})\, q_{ly} - q_{lx}^2 p_{ly} + q_{lx}^2 p_{ly} = -\,\varepsilon . q_{ly}, \tag{126}$$

hol

$$\varepsilon = \frac{h}{2\pi i}.$$

Tehát a következő egyenleteket kapjuk:

$$\begin{aligned} q_{lx}M_z - M_z q_{lx} &= -\,\varepsilon q_{ly} \\ q_{ly}M_z - M_z q_{ly} &= \varepsilon q_{lx}. \end{aligned} \tag{127}$$

A matrixok elemeire kifejezve:

$$\begin{aligned} q_{lx}(nm)\,(M_{zn} - M_{zm}) &= -\,\varepsilon q_{ly}(nm) \\ q_{ly}(nm)\,(M_{zn} - M_{zm}) &= \varepsilon q_{lx}(nm). \end{aligned} \tag{128}$$

Ha M_z nem változik egy átmenetnél, úgy $q_{lx} = 0$, $q_{ly} = 0$, azaz a rezgés lineárisan poláros a z tengely irányában. Összeszorozva az (128) egyenleteket:

$$\left\{ (M_{zn} - M_{zm})^2 - \frac{h^2}{4\pi^2} \right\} q_{lx}(nm)\, q_{ly}(nm) = 0, \tag{129}$$

azaz M_{zn} abszolut értéke minden ugrásnál 0-val vagy $\pm \frac{h}{2\pi}$ -vel változik. Az első esetben a z-tengely irányában lineáris rezgés, a másodikban az xy síkban cirkuláris rezgést kapunk.

Ezekben áttekintését nyujtottuk az új elméletnek, mely kétségkívül a kvantumelmélet legrendszeresebb összefoglalását nyujtja, de nagymértékben eltér a klasszikus felfogástól. Újabban Paulinak[1] sikerült ezen elmélet alapján a hydrogénatóm teljes tárgyalása, külső elektromos és mágneses erők esetében is. Mindenesetre a legnagyobb érdeklődéssel tekinthetünk az elmélet további kialakulása elé, főkép, hogy a kvantumelmélet nagy

---

[1] W. Pauli: Zeitschr. f. Phys. 36. 336. lap. 1926.

problémái, mint a több elektront tartalmazó atomok stabilitása és spektruma, a multiplettprobléma és anomális ZEEMAN-effektus tisztázását elő fogja-e mozdítani.

Nagyon figyelemreméltó mozzanat, hogy ezen esetben is hasonlóan, mint a relativitás elméleténél a mathematika oly fejezetei találtak fizikai alaptörvények megfogalmazásánál alkalmazást, melyek eddig fizikai alkalmazásoktól teljesen távol állottak. «Ez azt a benyomást kelti, hogy a mathematika és fizika a kölcsönös megtermékenyítés új stádiumába lépett.»[1]

Ortvay Rudolf.

DER AXIOMATISCHE AUFBAU DER QUANTENTHEORIE NACH HEISENBERG, BORN UND JORDAN.

Nach einer kurzen Übersicht der Grundprinzipien der Quantentheorie und des Korrespondenzprinzipes wird die neue Quantenmechanik von HEISENBERG, BORN und JORDAN dargestellt, einschliesslich der Dispersionstheorie von KRAMERS.

Es wird ausdrücklich darauf hingewiesen, dass diese Theorie keine raumzeitliche Beschreibung der Elektronenbahnen gibt und der Vermutung Ausdruck gegeben, dass die raumzeitlichen Begriffe für das Atom versagen und die Frage nach den Zwischenbahnen sinnlos sein könnte und schliesslich, dass die Theorie auf eine Modifikation des als physikalisch reell zu betrachtenden hinzuweisen scheint.

Rudolf Ortvay.

---

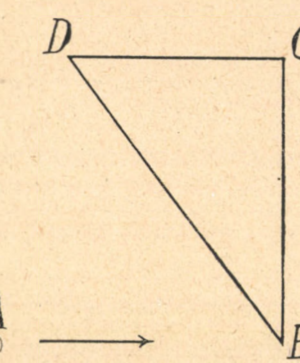
[1] NIELS BOHR: Die Naturwissenschaften. 13. évf. 10. lap. 1926.

A RELATIVITÁSELMÉLET KÍSÉRLETI ALAPJAIRÓL.

Újabban fokozott mértékben fordult a figyelem azok felé a kisérletek felé, melyek alapján a relativitáselméletnek, úgy a speciálisnak, mint az általánosnak a tapasztalattal való egyezése, vagy nem egyezése elbirálható. A lökést ez irányban talán a MILLER által megismételt MICHELSON-kisérlet adta, melynek eredménye az elmult nyáron általánosan — de, úgy látszik, feleslegesen — izgatta a kedélyeket. A következőkben ezért egy rövid áttekintést akarunk szerezni az idevonatkozó kisérleti anyag fölött.

A MAXWELL-féle elektrodynamika folytatását képező elektronelmélet tudvalévőleg az éthert, mint az elektromágneses tér hordozóját, abszolut nyugalomban lévőnek tekinti. Ez az éther szolgáltatta a koordinátarendszert, melyre a vakuum elektrodynamikájának alapegyenletei vonatkoztatandók, vagy szabatosabban kifejezve a különböző, egymáshoz képest transzlációs mozgást végző koordinátarendszerek között az elektrodynamika szempontjából ki volt tüntetve az, amelyik az étherben nyugodott. Ebben rejlett az éther jelentősége, ez volt existenciájának alapja. Ha azonban létezik egy ilyen éther, amelyben nyugvó koordinátarendszer elektrodynamikailag ki van tüntetve, úgy kell, hogy annak existenciája konstatálható legyen valami módon, mert hiszen az étherben nyugvó koordinátarendszer épen azáltal van kitüntetve, hogy e rendszerből megítélve egy elektrodynamikai jelenség máskép fog lefolyni, mint egy az étherben való nyugvás által ki nem tüntetett rendszerből megítélve. Az étherben való nyugvás által ki nem tüntetett, vagyis az étherhez képest mozgó koordinátarendszerekben e mozgás sebességének éreztetnie kell majd befolyását a jelenségek lefolyására. E befolyás alapján azután meghatározható kell legyen a kérdéses mozgó koordinátarendszernek az étherhez viszonyított sebessége. Ha azonban a kísérletek arra a tapasztalati eredményre vezetnének, hogy a koordinátarendszer sebességének ily befolyása nem létezik, hogy az étherhez képest különböző sebességekkel mozgó rendszerekben a jelenségek ugyanúgy folynak le, úgy nyilván az a rendszer, melynek sebessége az étherhez képest zérus, mely tehát az étherben nyugszik, elveszti kitüntetett szerepét és vele együtt az éther az exisztenciáját. Mert ha nem tudjuk megállapitani azt, hogy rendszerünk az étherhez képest ilyen meg ilyen sebességgel mozog, akkor nincs értelme beszélni az étherhez viszonyított mozgásról. Mert ha ezekután továbbra is feltesszük még az éther létezését és szupponálunk hozzá viszonyított mozgásokat, akkor csak olyasvalamit teszünk fel, aminek a jelenségekre befolyása nincs.

Tudjuk, hogy Földünk Napkörüli mozgásának sebessége az ekliptika síkjában irányát folyton változtatja, egy év alatt e sebesség irányváltozása 2π. Ha csak tehát nem akarunk visszatérni a geocentrikus álláspontra, azt kell mondanunk, hogy Földünknek az étherhez viszonyított sebessége is irányát egy év alatt szintén 2π-val változtatja. Legjobb esetben tehát csak egy t időpont lehetséges egy év alatt, midőn a Föld sebessége az étherhez viszonyitva zérus, egy félévvel később Földünk sebessége az étherhez viszonyítva akkor 60 $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$. Általában tehát egy határozott időpontban Földünk az étherhez képest határozott nagyságú és irányú sebességgel kell hogy mozogjon. Egy a Földdel mereven összekötött koordinátarendszerben e sebesség iránya, amennyiben e sebességnek az elektrodynamikai jelenségekre befolyása van, egy kitüntetett irány kell hogy legyen. Más szóval a Földdel mereven összekötött koordinátarendszerre vonatkoztatott tér elektrodynamikai szempontból nem lesz izotrop. Benne elektromágneses hullámok, pl. a fényhullámok különböző irányban, különböző sebességgel kell hogy terjedjenek. Ha azután a fényterjedés ezen anizotrópiája a Földdel mereven összekötött koordinátarendszerre vonatkozólag megállapitható, abból levezethető e rendszernek az étherhez viszonyitott sebessége irány és nagyság szerint. A fényterjedés ezen anizotrópiájának a megállapitása volt a híres MICHELSON-kísérlet célja.



1. ábra.

A kérdés, melyre a MICHELSON-kísérletnek felelnie kellett, EDDINGTON nyomán a következő *mechanikai analógiával világítható meg:* Jelöljünk meg az $\overrightarrow{AB}$ irányban (1. ábra) 30 m percenkénti sebességgel áramló vizben három A, B és C pontot, pl. a folyó medrébe vert cölöpökkel úgy, hogy az $\overline{AB}$ távolság és a $\overline{BC}$ távolság egyenként 100 m legyen. Legyen adva két úszó, kik nyugvó vizben 50 m percenkénti sebességgel úsznak. Induljanak el ezek *ugyanazon időpontban* B-ből; az egyik tegye meg a $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}$ utat, a másik a $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}$ utat. Kérdés, melyik ér előbb vissza B-be? Az előbbi a $\overrightarrow{BA}$ úton nyilván 20 m, az $\overrightarrow{AB}$ úton 80 m sebességgel úszik. A $\overrightarrow{BA}$ utat tehát 5 perc, az $\overrightarrow{AB}$ utat pedig 1·25 perc alatt, tehát az egész utat $t_1=6{\cdot}25$ perc alatt teszi meg. A C-be *igyekvő* úszónak nyilván azon D pont félé *kell tartania,* mely annyira van C fölött, hogy ha $\frac{1}{2}t_2$-vel jelölöm az időtartamot, mely alatt az úszó C-be ér,

$$\overline{DC}=\tfrac{1}{2}t_2\times 30\,\frac{\text{m}}{\text{perc}}\,.$$

Nyilván egyszersmind

$$\overline{DB}=\tfrac{1}{2}t_2\times 50\,\frac{\text{m}}{\text{perc}},$$

tehát

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=\frac{5}{3} \quad \text{és} \quad \frac{\overline{CB}}{\overline{DB}}=\frac{4}{5};$$

innen

$$\overline{DB} = 125 \text{ m},$$

tehát

$$\tfrac{1}{2} t_2 = 2{\cdot}5 \text{ perc}.$$

A második úszó tehát a $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}$ utat 5 perc alatt teszi meg és így hamarább jut vissza a B kiindulási ponthoz. c-vel jelölve az úszó és v-vel az áramló víz sebességét

$$\frac{6{\cdot}25}{5} = \frac{t_1}{t_2} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{1}$$

A MICHELSON-kísérletben az úszó a fényhullám, mely a nyugvó étherben c sebességgel terjed, az áramló víz az étherszél, mely a Földre épített laboratoriumon keresztül v sebességgel fúj, ha a Föld a nyugvó étherhez képest $-v$ sebességgel mozog.

A MICHELSON-kísérletben a $t_1 - t_2$ időt, mely (1) szerint

$$t_1 - t_2 = t_1\left(1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right)$$

és $\frac{v}{c}$-ben másodrendű tagokig bezárólag

$$t_1 - t_2 = \frac{t_1}{2}\frac{v^2}{c^2}, \tag{2}$$

összehasonlították a fényhullám egy teljes rezgésének T idejével. Ha λ a fény hullámhosszúsága a vakuumban,

$$T = \frac{\lambda}{c}.$$

Az összehasonlítás módja a következő: B-ből két kohärens hullám indul A-ba és C-be és tér vissza B-be. Ezeket interferáltatjuk. Nevezzük zérushelyzetnek a keletkező interferencia-csikrendszernek azt a helyzetét, mely előállna, ha az étherszél sebessége $v = 0$. Ha most az étherszél v sebességgel fúj, az interferenciák a zérushelyzethez képest eltolódnak a csíkszélességben mért

$$\triangle = \frac{t_1 - t_2}{T} = \frac{t_1}{2}\frac{v^2}{c^2}\cdot\frac{c}{\lambda} \tag{3}$$

darabbal. Ha l-el jelöljük az $\overline{AB} = \overline{BC}$ távolságot, a fent említett megközelítésben

$$\triangle = \frac{v^2}{c^2}\frac{l}{\lambda}. \tag{4}$$

A zérushelyzet nyilván nem állapitható meg, mert Földünket az étherhez képest nem állíthatjuk meg. Ennek megállapítása azonban elkerülhető azáltal, hogy az egész berendezést 90°-al elforgatjuk úgy, hogy az étherszél a $\overrightarrow{CB}$ irányba fújjon. Ekkor a zérushelyzethez képest $-\triangle$ csíkeltolódásnak kell jelentkezni. A két, 90°-al különböző azimutban észlelve az interferenciák helyét, azoknak tehát a csíkszélességben mért

$$2\triangle = 2\frac{v^2}{c^2}\frac{l}{\lambda} \tag{5}$$

darabbal kell eltolódniok, miközben az eszközt az egyik azimutból a másikba forgatjuk.

Ezzel szemben MICHELSON semmiféle csíkeltolódást nem észlelt. Földünk Napkörüli mozgásának 30 $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$-os sebességét alapul véve,

$$\frac{v^2}{c^2} = 10^{-8},$$

tehát egy kb. $l = 27{\cdot}3$ m karhosszúságú interferometerrel és a Hg-spektrum $\lambda = 546 \times 10^{-7}$ cm-es zöld vonalával kb.

$$2\triangle = 2 \times 10^{-8}\frac{2730 \text{ cm}}{546 \times 10^{-7}} = 1, \tag{5'}$$

vagyis egy teljes csíkszélességnyi eltolódás várható. Ennek 10 %-a, vagyis egy 3 $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$-os sebességnek megfelelő eltolódás még kényelmesen észlelhető. MICHELSON semmilyen évszakban és semmilyen azimutban ily eltolódást nem észlelt. Az ő kísérletének tanusága szerint tehát egy a Földdel mereven összekötött koordinátarendszerből megítélve a fény terjedési sebességére vonatkozólag semmiféle anizotropiát sem lehet megállapitani, az emlitett koordinátarendszerekre vonatkoztatva a fény gömbhullámokban terjed. Minthogy nyilván nem lehetséges, hogy Földünk az étherhez képest minden évszakban nyugalomban legyen, a MICHELSON-kisérletből azt tanuljuk, hogy az étherhez képest transzlációs mozgást végző koordinátarendszerekből megítélve a fény csakúgy gömbhullámokban terjed, mint az étherben nyugvó koordinátarendszerre vonatkozólag. Az étherben nyugvó koordinátarendszer tehát nincsen kitüntetve.

Az (5), illetőleg (5') formulák által kifejezett elméleti várakozás és a tapasztalat közti ellentétet a speciális relativitáselmélet tudvalévőleg azáltal hidalta át, hogy posztulálta épen a fenti tapasztalati eredményt, hogy t. i. az egymáshoz képest transzlációs mozgást végző koordinátarendszerek elektrodynamikailag egyenértékűek. Ez a követelés egymáshoz képest transzlációs mozgást végző koordinátarendszerek tér-idő koordinátái között a LORENTZ-transzformáció által kifejezett tér-idő kapcsolatokhoz vezet. Az (5) formula iménti levezetésénél az egymáshoz képest transzlációs mozgást végző rendszerek tér-idő koordinátái között a klasszikus mechanika GALILEI-transzformációja értelmében fennálló — a relativitáselmélet szerint helytelen — kapcsolatokból indultunk ki és ezért jutottunk ellentétbe a tapasztalattal.

Mint minden tapasztalat, úgy a MICHELSON-kisérlet negatív eredménye is magyarázható természetesen ad hoc hypothesisekkel is. Ezek azonban éppen lokális jellegüknél fogva nem állhatták meg helyüket EINSTEIN koncepciója mellett, mely tovább nagy horderejű tudományos megismerésekre vezetett.

Egy ily hypothesis volt LÉNÁRD hypothesise az ősétherre vonatkozólag. E szerint a Föld úgy mozog az étherben, mint valamely szilárd test egy viszkozus folyadékban. A Föld a vele közvetlenül érintkező éthert mozgásában magával viszi, a Földön lejátszódó experimentumoknak tehát úgy kell lefolyniok, mint a nyugvó étherben. A Földet körülvevő étherburokban azonban az éthernek a nyugvó ősétherhez viszonyított sebessége a Földtől távolodva fokozatosan csökken és ez az étherburok fokozatosan átmegy a nyugvó ősétherbe. Közvetlenül a Föld felületén tehát az étherszelet nem érezzük, de a Földtől távolodván az étherszél a Földhöz képest fokozott erősséggel fúj. Ennek értelmében tehát, ha a tenger színén nem is, de magas hegyek tetején pozitív MICHELSON-effektus várható.

MICHELSON régi vizsgálatainak munkatársa, MILLER, egy 1925 nyarán publikált cikkében[1] tényleg azzal lepte meg a világot, hogy a Mount Wilson tetején, 1800 m magasságban a tenger színe felett, 10 $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$-os étherszél fúj. Ezt az eredményt előbb mérési hibáknak tulajdonították és az eszközt a legnagyobb gonddal, minden vasalkatrész kizárásával újraépítették. Evvel az újabb készülékkel is pozitív effektust kaptak. Ezután az eszközt leszállították Clevelandba, a síkságra és ott negatív eredményt kaptak. Ezután újra felvitték a Mount Wilsonra és más helyen, mint azelőtt, újra felállították. Ismét pozitív eredményt kaptak.

Nyilvánvaló, hogy egy ilyen MICHELSON-kísérlet, mely magasan fekvő helyeken végezve pozitív eredménnyel jár, felborítja az EINSTEIN-féle relativitáselméletet, de felborítással fenyegeti az abszolut nyugvó étherrel dolgozó LORENTZ-féle elektronelméletet is. A mozgó közegekben észlelt elektrodynamikai és optikai jelenségek ugyanis két csoportra oszlanak: a $\frac{v}{c}$-ben I-rendű és a $\frac{v}{c}$-ben II-rendű effektusokra. A MICHELSON-kísérlet, mint (5)-ből látható, a másodrendű effektusok közé tartozik. Mivel $v = 30\,\frac{\text{km}}{\text{sec}}$-t véve alapul, $\frac{v}{c} = 10^{-4}$, $\frac{v^2}{c^2} = 10^{-8}$, a másodrendű effektusok megfigyelése lényegesen nagyobb feladat elé állítja az experimentátort. A MILLER előtti tapasztalat, mely azonban, hogy úgy mondjam, csak a «tenger színére» vonatkozott, az volt, hogy sem I., sem II-rendű effektusok nem állapíthatók meg. A LORENTZ-féle elmélet megmagyarázta az I-rendű effektusok elmaradását, de szerinte a II-rendű effektu-

[1] D. C. MILLER: Proc. Nat. Ac. Washington, 11, 314. l. 1925.

soknak be kell következni. Ezzel szemben az EINSTEIN-féle relativitáselmélet elvileg követelte minden rendű effektus elmaradását.

Ha most MILLER tapasztalata beigazolódik, hogy tudniillik a MICHELSON-kisérlet a tenger szinén negatív eredménnyel jár, magas hegyeken pedig pozitív eredménnyel, úgy az experimentátor szempontjából az I-rendű effektusokra vonatkozó, «tengerszini», negatív eredményű tapasztalat is revizióra szorul. Ha ugyanis a tengerszini MICHELSON-kisérlet negatív eredményének az oka az, hogy oly alacsonyan még nem fúj az étherszél, úgy az I-rendű effektusok tengerszini elmaradásának is ez lehet az oka. Ha közülök csak egy is, úgy mint a MICHELSON-kisérlet egy magas hegyen pozitív eredménnyel jár, úgy a LORENTZ-elméletet, mely szerint az I-rendű effektusok bármily étherszélben is elmaradnak, szintén veszély fenyegeti.

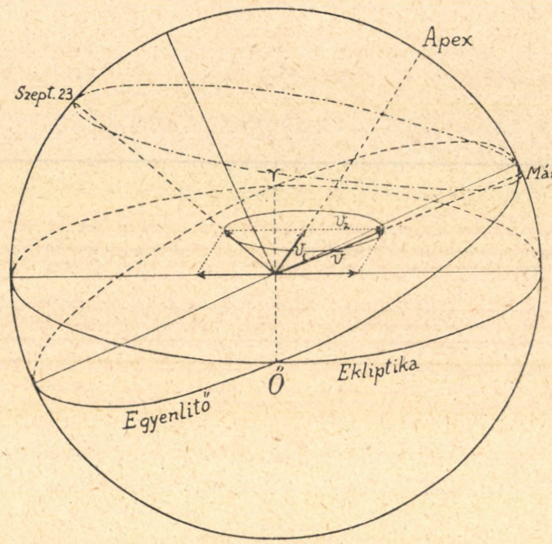
Egyelőre azonban még nem vagyunk ennyire. MILLER észlelései sürgős ellenőrzésre szorulnak, egyrészt, mert alapvető fontosságúak, másrészt, mert súlyos aggályok merültek fel velük szemben. A MICHELSON-kisérlet eredménye ugyanis addig egyszerű, míg negatív eredménnyel jár. Ekkor a csíkoknak eltolódása egy 90°-os forgatás után minden időben és az interferometer minden kezdőazimutjában zérus kell hogy legyen. Ha azonban a kisérlet pozitív eredménnyel jár, akkor az észlelt csíkeltolódásnak és az abból levezetett étherszélnek, e szél nagyságának és irányának érthető okokból szabályszerűen kell függenie a csillagidőtől és a dátumtól, amennyiben Földünknek az étherhez viszonyított mozgása összefügg Földünknek asztronomiailag megállapított mozgásaival, vagy általában a Napkörüli mozgásból és oly transzlációkból tevődik össze, melyek sebessége hosszabb idő lefolyása alatt irány és nagyság szerint állandó.

A pozitív MICHELSON-effektusnak a csillagidőtől való függése WEBER[1] nyomán egyszerűen áttekinthető. Az Apexnek, mely

---

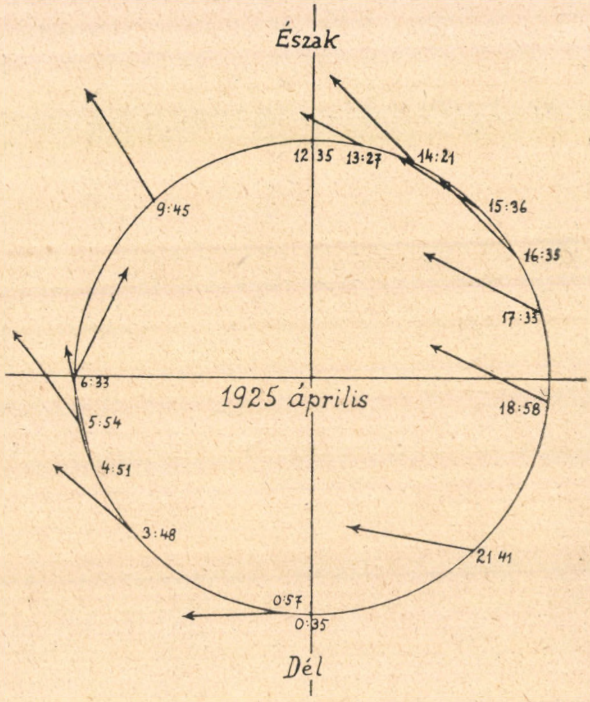
[1] WEBER: Der Michelsonversuch von D. C. Miller, Phys. Ztschrft 1926, 5. lap.

felé az egész Naprendszer 20 $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$-os sebességgel halad, a koordinátái középértékben: rektaszcenzió $\alpha = 270°$, deklináció $\delta = +32°$. Az Apex felé irányított mozgáshoz jön még a Napkörüli mozgás 30 $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$-os sebességgel. Ennek következtében az A pont, mely felé a Föld mozog, ahonnan tehát az étherszél fúj, folyton változtatja helyét az égbolton. ♈ jelölje az éggömbön (2. ábra) a tavaszi, $\breve{O}$ az őszi napéjegyenlőségi pontot. Az



2. ábra.

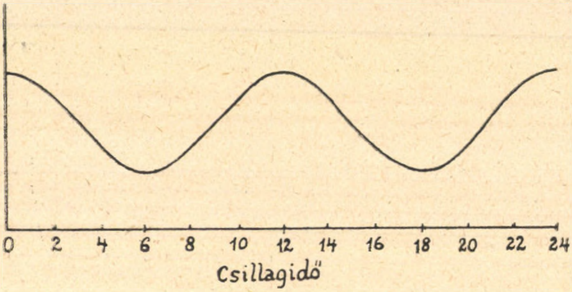
éggömb középpontjából mérjük fel a Naprendszernek az Apex felé irányított v_1 sebességét irány és nagyság szerint. A v_1 sebesség végpontjából kiindulva egy az ekliptikával párhuzamos síkban mérjük fel irány és nagyság szerint a Föld Napkörüli mozgásának v_2 sebességét, vagyis rajzoljuk meg e mozgás hodográfját. Az éggömb középpontjából kiinduló és e hodográf pontjaiban végződő $\bar{v}$ vektorok adják irány és nagyság szerint a Föld eredő mozgásának sebességét. Valamely időpontban, melyben a Nap rektaszcenziója α, a Föld $\bar{v}$ sebességét az éggömb középpontjából a hodográf $\alpha - 90°$ rektaszcenziójú pontjához húzott vektor adja. Márc. 21-én pl., midőn a Nap ♈-ben van, a 270°-os rektaszcenziójú hodográfpont adja $\bar{v}$-t. Az így meghatározott $\bar{v}$-k kúpja a — · — · — körben metszi az éggömböt. Ez az A pontoknak, melyekből az étherszél fúj, a geometriai helye egy év leforgása alatt. Március 21-én az A pont az egyenlítő kö-



3. ábra.

zelében van és rektaszcenziója 270°, szept. 23-án deklinációja $+65°$, rektaszcenziója 90°. Az észlelés szempontjából a legkedvezőbb dátum március vége, mikor az A pont az egyenlítő közelében van, mert egyrészt $\bar{v}$ maximális értékű, másrészt a kérdéses A pont egy nap folyamán kétszer a horizonton van, tehát $\bar{v}$ teljes értékében érvényre jut. Ezzel szemben szeptemberben $\bar{v}$ minimális értékű és a kérdéses A pont a Mount Wilson számára circumpoláris.

Földünk tengelykörüli forgása következtében az étherszél azimutja és intenzitása napos periodussal folyton változik. Ameddig az *A* pont deklinációja az észlelési hely földrajzi szélességénél kisebb, az étherszél azimutja egy nap folyamán 0°-tól 360°-ig változik, miközben az étherszél erősségének két maximuma és két minimuma van az *A* pont magasságának változása szerint. Ez az eset áll elő áprilisban, mikor az *A* pont az egyenlítő közelében van, míg a Mount Wilson geográfiai szélessége kb. 34°. Vessünk most egy pillantást a 3. ábrára, mely MILLERnek 1925 áprilisában nyert eredményeit tünteti elő. A nyilak, melyek egy kör kerületéből kiindulólag vannak fel-



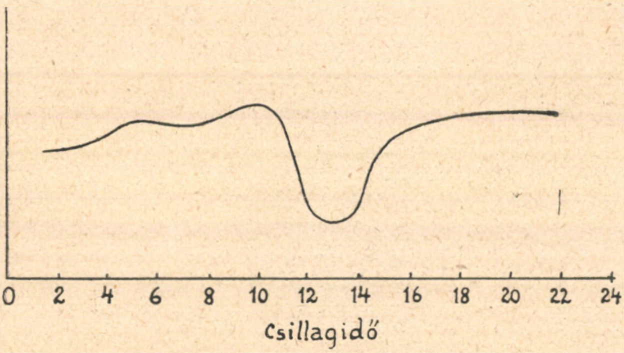
4. ábra.

rajzolva, a MILLER észleléseiből levezetett étherszelet jelzik irány és nagyság szerint azokban a csillagidőkben, melyek az egyes nyilak mellé vannak írva. Látható, hogy az észlelt étherszél sem azimutjának, sem abszolut értékének a csillagidőtől való függésében nem mutatja a várható szabályosságot.

A 2. ábra alapján pl. könnyen áttekinthető, hogy március végén, vagy áprilisban, a Nap rektaszcenzióját 0-nak véve, 1. délben, tehát körülbelül 0^h csillagidőben az étherszélnek maximális erősségben nyugatról kell fújnia, míg MILLER szerint keletről fúj, 2. kb. 6^h csillagidőben az étherszélnek minimális erősségben északról kell fújnia, MILLER szerint délnyugatról fúj, 3. éjfélkor, kb. 12^h csillagidőben az étherszélnek maximális erősségben keletről kell fújnia, MILLER szerint délkeletről fúj, 4. reggel 6 órakor, kb. 18^h csillagidőben, az étherszélnek minimális erősségben délről kell fújnia, MILLER szerint kelet—dél—keletről fúj.

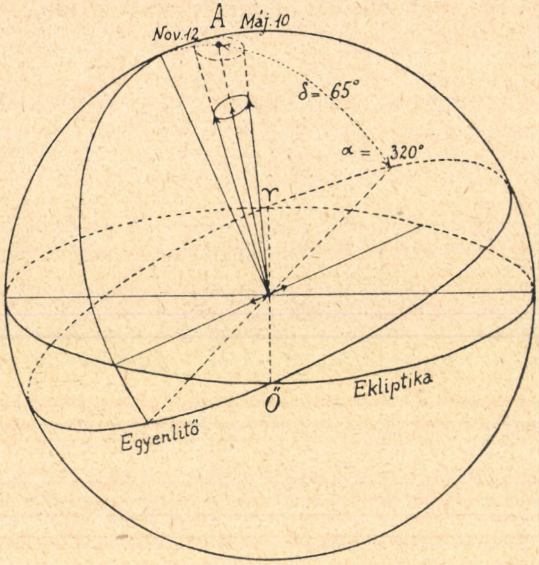
Az étherszél várható nagyságát a 4. ábra, a MILLER által észlelt nagyságát az 5. ábra mutatja. Az észlelt görbe itt sem egyezik az A pontnak a napi forgás következtében előálló magasságváltozása alapján várható görbével.

Hasonlóképen nem egyeztethetők össze MILLER észlelései a STRÖMBERG-féle Apex felé irányuló mozgással. Ennek koordinátái $\alpha = 320°$ és $\delta = +65°$ és a Naprendszer feléje irányuló sebessége 300 $\frac{\text{km}}{\text{sec}}$. A 2. ábrában jelzett konstrukciót ismét



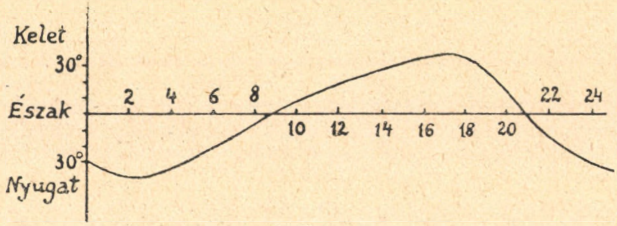
5. ábra.

alkalmazva a 6. ábrában a —·—·— kör adja az A pontok geometriai helyét. Az A pontok deklinációja egy év leforgása alatt mindössze 59°-tól 71°-ig változik, mert az Apex felé irányuló sebesség tízszer akkora, mint a Föld sebessége a Nap körül. Az A pont deklinációja tehát mindig nagyobb, mint a Mount Wilson földrajzi szélessége. Az étherszél azimutja ezért egy nap alatt 142°-tól 218°-ig változik és vissza. Ebben az esetben tehát épúgy mint azelőtt, *az étherszél azimutváltozásának egy nap folyamán szimmetrikusnak kell lenni a meridián-síkra vonatkozólag.* A várható azimutváltozásokat a 7. ábrában látjuk, ezzel szemben MILLER azimutjai (8. ábra) csak kb. 10°-al mennek 180° fölé, de kb. 80°-al 180° alá. Az étherszél várható nagysága, mint a csillagidő függvénye WEBER szerint, a 9. ábrában látható, melynek ordinátái azonban 10-szeresen nagyítandók, ha ugyanazt a léptéket akarjuk alkalmazni, melyet MILLER alkalmaz az 5. ábrában.



6. ábra.

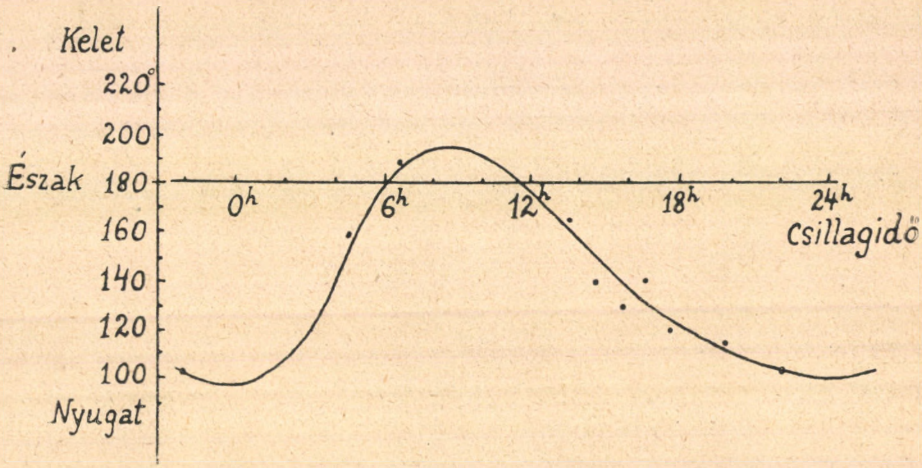
Összefoglalóan tehát azt mondhatjuk, *hogy az eddigi publikációk alapján* MILLER *észleléseinek semmi közük az asztronómiai észlelésekből levezetett Apexmozgásokhoz; továbbá bárhol*



7. ábra.

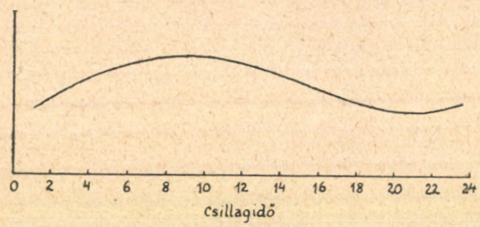
is van az a pont, mely felé Földünk mozog és bármekkora is e mozgás sebessége, ha csak e pont legalább egy napig helyét az égbolton nagyobb mértékben nem változtatja, az étherszél nagyságának és azimutjának a Föld tengelykörüli forgásából *előálló napi változása szimmetrikus kell hogy legyen a meridiánsíkra vonatkozólag.* MILLER *észlelései ezt az általános követelményt sem elégítik ki.*

Végeredményben tehát azt mondhatjuk, hogy MILLER észlelései



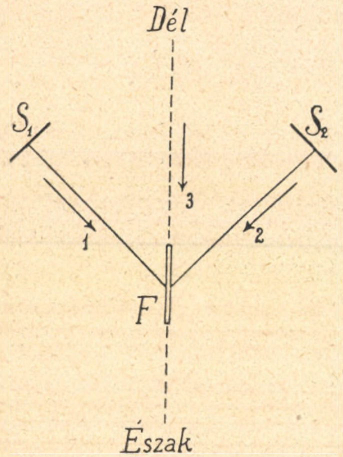
8. ábra.

nyitva hagyják a kérdést, hogy a tenger színe fölött bizonyos magasságban van-e étherszél vagy nincs. Értesüléseim szerint jelenleg Földünk több, a tenger színe fölött magasan fekvő pontján folynak, illetőleg előkészületben vannak idevonatkozó észlelések.



9. ábra.

Ezzel kapcsolatban rá akarok mutatni arra, hogy a MICHELSON-kisérletnek egy más kiviteli módja is lehetséges és egy ily nagyfontosságú elméleti kérdés experimentális eldöntésénél a döntő kisérlet más módon való végrehajtásának értékes ellenőrző szerep juthat. A MICHELSON-kisérletnek ez a másik kiviteli módja a fent emlitettől abban különbözik, hogy forgatható interferometer helyett a Földdel mereven összekötött interferometert használunk és az interferometernek az étherszélhez képest való forgatását a Föld tengelykörüli forgására bizzuk. Az étherszél irányára és nagyságára vonatkozólag ugyanis a meridiánsik szimmetriasik. Ha tehát felállitunk egy interferometert (10. ábra) a meridiánra szimmetrikusan, úgy a tavaszi hónapokban, míg az A pont deklinációja az észlelési hely földrajzi szélességénél kisebb, az A pont delelése előtt néhány órával az étherszél az S_1 tükör irányából fog az F féligáteresztő lemez felé fújni, néhány órával később pedig *ugyanoly erősségben* az S_2 tükör irányából. Amennyiben van étherszél, úgy mialatt az étherszél azimutja az 1. nyíl irányából a 3. nyíl irányába fordul (A pont delelése), a csíkeltolódásnak egy szélső értéktől zérusig kell csökkennie és azután, mialatt az étherszél azimutja a 2. nyíl irányáig tovább változik, egy ellenkező előjelű szélső értéket felvennie. Amennyiben étherszél nincs, a csíkrendszernek nem szabad helyből mozdulnia.



10. ábra.

Láttuk, hogy Michelson kisérlete, amennyiben negativ eredménnyel végződik — és Miller vizsgálatai ezt egyelőre még nem cáfolták meg — arra utal, hogy két egymáshoz képest egyenletes transzlációs mozgást végző koordinátarendszer téridő koordinátái közötti kapcsolatokat a Lorentz-transzformáció fejezi ki. A koordináták közötti ezen kapcsolatoknak azonban nemcsak az elektrodynamikában, hanem a mechanikában is érvényeseknek kell lenniök. Másrészt a relativitás elvének is mechanikai jelenségekre és általában mindenfajta fizikai jelenségre éppúgy érvényesnek kell lennie, mint az elektrodynamikai jelenségekre. A tapasztalat szerint ugyanis mechanikai jelenségek alapján az étherszél iránya és nagysága éppoly kevéssé állapitható meg, míg elektrodynamikai jelenségek alapján. Ezért tehát a mechanika törvényei is invariánsak kell hogy legyenek a LORENTZ-transzformációval szemben. Minthogy a klaszszikus mechanika alapegyenletei tudvalevőleg az úgynevezett GALILEI-transzformációval szemben invariánsak, tehát nem invariánsak a LORENTZ-tranzformációval szemben. A relativitáselméletnek tehát újra meg kellett alapoznia a mechanikát. E megalapozásnál az elektromágneses energia tehetetlenségére vonatkozó alapvető megismerést ki kellett terjesztenie a mechanikai energiára is. A relativításelmélet tehát oda vezetett, hogy a mechanikai energiának is és mindenfajta energiának van tehetetlen tömege és viszont a tömeg az energia egy fajtája. A relativitáselmélet szerint egy m tömegű test E energiája egy oly koordinátarendszerre vonatkozólag, melyhez képest a tömeg v sebességgel mozog:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = mc^2 + \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^2} + \cdots \qquad (6)$$

hol c a fénysebesség a vakuumban. Egy oly koordinátarendszerre vonatkozólag, melyben az m tömeg megnyugszik, $v=0$, tehát

$$E^\circ = mc^2.$$

Valamely tömegnek tehát akkor is van energiája, ha nyugszik. Ez a nyugalmi energia egyenlő a tömeg és a fénysebesség négyzetének szorzatával. A kinetikai energia az E és E° energiának különbsége:

$$E - E^\circ = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right) = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{3}{8}\frac{v^4}{c^2} + \cdots \qquad (6')$$

Első megközelitésben tehát a klasszikus mechanika kifejezése adódik.

Ezt a megismerést EINSTEIN a speciális relativitáselmélet legfontosabb eredményének tekinti. Ezáltal az energia megmaradására vonatkozó tétel identikus lesz az anyag megmaradására vonatkozó tétellel. Hogy a tömeg lappangó energiát reprezentál, kvalitative megerősítik a rádioaktivitás jelenségei. A rádioaktiv bomlást hőfejlődés, továbbá α-, β- és γ-sugárzás, szóval energia-leadás kiséri. Ez az energia a bomló tömeg által reprezentált energiából kerül elő. Ennek kvantitativ igazolása eddig természetesen nem volt lehetséges, mert az energiaveszteségnek megfelelő súlyveszteség — tekintve, hogy a leadott energiát $c^2 = 9 \times 10^{20}$-al kell osztani, hogy megkapjuk az energialeadás következtében elvesztett tömeget — oly csekély, hogy évek hosszú során át tartó bomlás után sem volna kimutatható.

A (6) alatti energiaképlet kisérleti igazolását a spektroszkópiában nyerte. Nagy feloldóképességű spektrometerben vizsgálva a színképvonalakat, azok tudvalévőleg elektromos és mágneses tér hiányában is több komponensből összetetteknek mutatkoznak, pl. a H-BALMER-sorozat vonalai páros vonalak stb. E komponensek viszonylagos távolságai, elrendezésük és viszonylagos fényerősségeik együttvéve alkotják azt a bonyolult jelenségcsoportot, melyet a színképvonalak finom szerkezete elnevezéssel illetünk.

Ezt az egész bonyolult jelenségcsoportot minden részletében és kvantitative is sikerült SOMMERFELD-nek azáltal értelmeznie, hogy a BOHR-féle atómminta elméletét relativisztikus alapra helyezte, vagyis egyrészt a kinetikai energiára vonatkozólag a (6') alatti formulát, másrészt a «tranzverzális» tömegnek a sebességtől való függésére vonatkozólag a relativitáselmélet

$$m_t = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \tag{6''}$$

formuláját alkalmazta. SOMMERFELD szerint pl. a BALMER-sorozat páros vonalainak állandó frekvenciakülönbsége

$$\Delta \nu_H = 0{\cdot}365 \text{ cm}^{-1} \tag{7}$$

kell hogy legyen és PASCHEN mintaszerű mérései a

$$\Delta\nu_H = 0{\cdot}36\,45 \pm 0{,}0045 \text{ cm}^{-1}$$

értékhez vezettek.

A hydrogén-színkép analogonjai nagyobb rendszámú elemeknél a RÖNTGEN-színképek. A BALMER-sorozatnak megfelel a RÖNTGEN-színképek L-sorozata, a BALMER-dubletnek az L-dublet. SOMMERFELD szerint valamely Z-rendszámú elem L-vonalpárjának frekvenciakülönbsége

$$\Delta\nu_L = (Z - s)^4 \Delta\nu_H,$$

hol s egy állandó, melynek egyszerű elméleti jelentése van. Ez a törvény $\Delta\nu_H$ (7) alatti értékéből kiindulva végig követhető az egész periodikus rendszeren. A relativitáselmélet ezen spektroszkópiai eredményei a legszebbek közé tartoznak.

A relativitáselméletnek az energia tehetetlenségére vonatkozó eredményével kapcsolatban megemlítjük a TROUTON- és NOBLE-féle kondenzátor-kisérletet. Nevezett kutatók egy töltött lemezes sűrítőt bifilárisan úgy függesztettek fel, hogy a sűrítő függélyes sikú lemezei az étherszéllel bizonyos szöget zárjanak be. Az abszolut elmélet értelmében ekkor az abszolut nyugalomban lévő étherhez képest v sebességgel mozgó sűrítőre egy függélyes tengely körül forgató, $\frac{v^2}{c^2}$-el arányos nyomaték működik, mely igyekszik a sűrítő lemezeit a $-v$ sebességű étherszéllel párhuzamosan állítani. A relativitáselmélet szerint a sűrítő nem fog elfordulni. Ez könnyen belátható, ha meggondoljuk, hogy a relativitáselmélet szerint a jelenségnek abban a $k°$ koordinátarendszerben, melyben a sűrítő nyugszik, ugyanúgy kell lefolynia, mint egy másik $k°$-hoz képest $-v$ sebességgel mozgó koordinátarendszerben, melyhez képest a sűrítő v sebességgel mozog. $k°$-ban azonban a töltött sűrítőt egy elektrosztatikai erőtér veszi körül, mely a sűrítőre semmiféle forgató nyomatékot nem gyakorol. A kisérlet a relativitáselméletnek adott igazat. MILLER észlelései után 1925 novemberében e kisérletet TOMASCHEK a Jungfraujochon (3300 m) megismételte és szintén nem tapasztalt forgató nyomatékot.

Vessünk most egy pillantást az általános relativitáselmélet kísérleti támaszaira. Itt szem előtt kell tartanunk, hogy csupa oly hatásról van szó, melyeket csak az általános relativitáselmélet jósolt meg és melyek után csak az általános relativitáselmélet bemondása alapján kezdtek kutatni.

Az EINSTEIN-féle általános relativitás- és gravitációelmélet alapját az ekvivalencia-elv képezi, melynek tapasztalati alapja báró EÖTVÖS LORÁNT-nak a tehetetlen és gravitáló tömeg egyenlőségére vonatkozó klasszikus vizsgálata.

A klasszikus mechanika értelmében a NEWTON-féle mozgásegyenletek, pl. egy anyagi pont mozgásának

$$m\frac{d^2x_1}{dt_1^2}=X_1,\quad m\frac{d^2y_1}{dt_1^2}=Y_1,\quad m\frac{d^2z_1}{dt_1^2}=Z_1$$

egyenletei egy a NEWTON-féle abszolut térben nyugvó k_1 koordinátarendszerre vonatkoztatandók. Ha erről áttérünk egy hozzá képest gyorsuló, pl. ω szögsebességgel forgó k-koordinátarendszerre az

	x	y	z
x_1	$\cos\omega t$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\omega t\right)$	0
y_1	$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\omega t\right)$	$\cos\omega t$	0
z_1	0	0	1

, $t_1=t$

transzformációval, úgy a mozgásegyenletek, mint arról egyszerű számitással meg lehet győződni, az

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=X+2m\omega\frac{dy}{dt}+m\omega^2x,$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=Y-2m\omega\frac{dx}{dt}+m\omega^2y,$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=Z$$

alakot öltik. A mozgásegyenletek tehát k-ban más alakúak, mint k_1-ben. Ha k-ban is ragaszkodunk a NEWTON-féle erődefinicióhoz, mely szerint az erő egyenlő a tömeg és gyorsulás szorzatával, bevezethetjük a fiktív, a centrifugális erőket: a CORIOLIS-erőt és a közönségesen centrifugálisnak nevezett erőt. Ekkor azt a tényt, hogy a mozgásegyenletek k-ban más alakúak, mint k_1-ben, egy más terminológiával úgyis kifejezhetjük, hogy k-ban fiktív erők lépnek fel, a centrifugális erők. Már MACH reámutatott azonban arra, hogy a klasszikus mechanika arra a kérdésre, hogy a centrifugális erők mely ok következtében lépnek fel, nem tud az ismeretelmélet szempontjából kielégítő feleletet adni. A klasszikus mechanika ugyanis azt mondja, hogy a centrifugális erők azért lépnek fel, mert a k-rendszer, melyre a mozgást vonatkoztattuk, k_1-hez képest forog. Ez a forgás azonban más hatásában, mint a centrifugális erők felléptében nem figyelhető meg, mert hiszen a k_1-rendszer azáltal van csak megadva, hogy reá vonatkoztatva a mozgást, nem tapasztalunk centrifugális erőket. A klasszikus mechanika felelete tehát oda lyukad ki, hogy a centrifugális erők azért lépnek fel, mert fellépnek, mert a mozgást nem arra a rendszerre vonatkoztattuk, melyben nem lépnek fel.

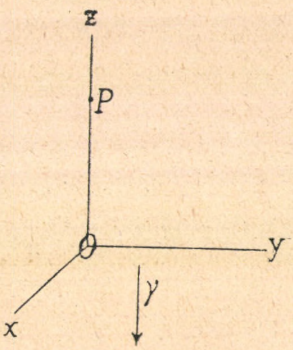
A felvetett kérdésre az ismeretelmélet szempontjából kielégítő feleletnek a centrifugális erők felléptének okául olyat kell megjelölni, mely más hatásában is, nemcsak a centrifugális erők felléptében megfigyelhető. Ezért azt kell mondanunk, hogy centrifugális erők k-ban azért lépnek fel, mert k forog a világűrben lebegő többi testhez, az állócsillagok rendszeréhez képest, vagy ami ugyanaz, az állócsillagok rendszere forog k-hoz képest. Ezáltal egy relatív, vagyis megfigyelhető mozgást adunk okul és a fiktív, centrifugális erők helyébe az állócsillagok k-hoz képest forgó rendszere által kifejtett valódi hatások lépnek. E felfogás nyilván az asztronómiai tapasztalatokkal összhangban van, mert egy bolygó annál lapultabb, mennél nagyobb sebességgel forog az állócsillagok rendszeréhez képest.

Ha tehát az ismeretelmélet jogos kritikájától tartva, nem akarunk fiktív erőkhöz jutni, úgy — megemlékezve azok eredetéről — óvakodnunk kell attól, hogy a mozgásegyenleteket a priori kitüntetett koordinátarendszerekre vonatkoztassuk. Így eljutunk az általános relativitáselmélet azon követeléséhez, hogy a mechanika és általában a fizika törvényei olyan alakúak legyenek, melyek egymáshoz képest bárhogyan mozgó koordinátarendszerekben érvényesek.

Az általános relativitáselmélet tehát a gyorsulásokat sem tekinti abszolutaknak, vagyis olyanoknak, melyeket a fiktív erők elárulnak, hanem csakis relatív gyorsulásokat ismer. A gyorsulások relativitására vonatkozó ezen felfogásában az általános relativitáselmélet a gravitáló és tehetetlen tömeg egyenlőségére vonatkozó, Eötvös által nagy pontossággal megalapozott tapasztalatra támaszkodik.

Ha egy észlelő megállapítja, hogy valamennyi test az ő koordinátarendszeréhez képest ugyanakkora γ gyorsulással mozog, akkor ezt a jelenséget illetően szabadon választhat két felfogás között; vagy azt mondhatja, hogy a testek egy γ gyorsulású nehézségi erőtérben mozognak, vagy azt, hogy koordinátarendszere a testekhez viszonyítva $-\gamma$ gyorsulással mozog. Az észlelő tehát koordinátarendszere gyorsulásától eltekinthet, ha bevezet egy megfelelő gyorsulást létesítő gravitációs erőteret. A gyorsuló koordinátarendszer ekvivalens a gravitációs erőtérrel ellátott nem gyorsuló koordinátarendszerrel. Ez az Einstein-féle ekvivalencia-elv tartalma. A speciális relativitáselmélet azt mondotta, hogy a jelenségek egymáshoz képest transzlációs mozgást végző koordinátarendszerekből megítélve egyformán, ugyanazon törvények szerint folynak le. Ha most egy k_0 koordinátarendszerről áttérünk egy hozzá képest gyorsuló k_1-rendszerre, a törvények, melyek szerint a jelenségek lefolynak, megváltoznak, *de* az általános relativitáselmélet szerint *csak annyiban, amennyiben megváltoznak a gravitációs terek*. A speciális relativitáselmélet egymáshoz képest egyenletes transzlációs mozgásban lévő koordinátarendszerek közötti átmenetek alkalmával a természeti törvények invarianciáját követeli, az általános relativitáselmélet egymáshoz képest gyorsuló koordinátarendszerek közötti átmenetek alkalmával a gravitációs terekkel való kovarianciát.

Nézzük most, hogy e felfogás alapján minő kísérletileg ellenőrizhető konzekvenciák vonhatók. Vegyünk tekintetbe egy a pozitív z-tengely irányában γ gyorsulással mozgó koordinátarendszert. (11. ábra.) Abban a $t=0$ pillanatban, midőn a koordinátarendszer e mozgását megkezdi, induljon el az O kezdőpontjából egy ν_1 frekvenciájú fényhullám ugyancsak a pozitív z-tengely mentén. Első megközelítésben feltehetjük, hogy a fény koordinátarendszerünkre vonatkozólag is a vakuumban érvényes c sebességgel terjed. A O-ból $t = 0$ pillanatban elinduló hullám tehát



11. ábra.

$$t = \frac{h}{c} \tag{8}$$

időben eléri az O-tól h távolságra lévő P pontot. E pillanatban az egész koordinátarendszernek, tehát a P-ben lévő észlelőnek is a sebessége

$$v = \gamma t. \tag{9}$$

A P-ben lévő észlelő által megfigyelt ν frekvencia a DOPPLER-elv szerint

$$\nu_2 = \nu_1\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \nu_1\left(1 - \frac{\gamma h}{c^2}\right); \tag{10}$$

nyilván

$$\nu_2 < \nu_1, \tag{11}$$

vagyis a P-ben lévő észlelő számára a színképvonalak eltolódnak a színkép vörös vége felé.

A P-ben lévő észlelő már mostan az ekvivalencia-elv alapján arra az álláspontra helyezkedhet, hogy nem a koordinátarendszere mozog γ gyorsulással a $+z$-tengely irányában, hanem a fényhullám $-\gamma$ gyorsulást létesítő gravitációs mezőben mozog és ez az oka a (10) értelmében adódó vörös-eltolódásnak. Az ekvivalens gravitációs tér potenciálja a $+z$-tengely irányában növekedik, a $-z$-tengely irányában, mely irányban a testek a gravitációs térben esnek, a gravitációs potenciál csökken. Ha a $+z$-tengely irányában dz-vel odább megyünk a Φ gravitációs potenciál megváltozása

$$d\Phi = \gamma dz.$$

$h\gamma$ tehát a gravitációs potenciál megváltozása a h úton. Ha tehát az O és P közötti potenciálkülönbség egyenlő Φ-vel, (10)-ből lesz:

$$\nu_2 = \nu_1 \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right). \tag{12}$$

Ha tehát egy homogén gravitációs térben a fény alacsonyabb potenciálú helyről, vagyis nagy tömegek közeléből, magasabb potenciálú helyre megy, akkor rezgésszáma (12) értelmében csökken, a színképvonalak

$$\nu_2 - \nu_1 = - d\nu_1 = \nu_1 \frac{\Phi}{c^2}$$

darabbal eltolódnak a színkép vörös vége felé. Ez az EINSTEIN-féle vörös-eltolódás. A Napról a Földre érkező fényre vonatkozólag $\frac{\Phi}{c^2} = 2 \times 10^{-6}$, tehát mivel

$$\nu_1 = \frac{c}{\lambda}, \quad d\nu_1 = - \frac{c d\lambda}{\lambda^2},$$

$\lambda = 4000$ Å hullámhosszúságú fényre vonatkozólag

$$d\lambda = \lambda \frac{\Phi}{c^2} = 0{\cdot}008 \text{Å}.$$

Ez egy csekély, de még mérhető érték. A régebbi, pontatlanabb mérésektől eltekintve, nézzük CHARLES E. ST. JOHN [1] észleléseit, melyeket a Mount Wilsonon végzett. A Nap középpontján észlelt (abszorpciós) vonalak hullámhosszát összehasonlította a laboratóriumban vakuumívben keletkező vonalak

---

[1] CHARLES E. ST. JOHN: Proceedings Nat. Acad. Washington. 12. k. 1926. 65. lap.

hullámhosszúságával. Megállapítja más észlelések alapján, hogy a Nap-atmoszféra megfordító részében a nyomás oly csekély (0·05 atm.), hogy az anomális refrakció által okozott effektusok nem jöhetnek tekintetbe mint a színképvonaleltolódások magyarázatai. Több mint 300 színképvonalon a következő táblázat második oszlopában álló vörös eltolódást észlelte:

λ	$d\lambda_é$	Rel. elm.	Észl.—Szám.	v	
3826 Å	+0·012 Å	+0·008	+0·004	0·3 $\frac{km}{sec}$	lefelé
3821	112	081	+ 32	0·25 «	
4308	113	091	+ 22	0·16 «	
5419	112	115	— 03	0·0 «	
4166	072	088	— 16	0·1 «	felfelé
6294	115	133	— 18	0·1 «	
4763	069	100	— 31	0·2 «	
4957	074	105	— 31	0·2 «	

A harmadik oszlopban áll az általános relativitáselmélet által követelt érték, a negyedik oszlopban az észlelt és számított értékek különbsége. A különböző színképvonalakra vonatkozó értékek oly sorrendben vannak a táblázatba felvéve, hogy legfelől áll arra a színképvonalra vonatkozó érték, mely színképvonal a Nap-atmoszféra legfelsőbb rétegében keletkezik, a többiek annak a rétegnek magassága szerint, melyből származnak. Az észlelt és számított értékek eltérését St. John a vonalakat adó gőzök vertikális áramlásából származó Doppler-effektusnak tulajdonitja. Az ekvivalens Doppler-sebességek (5. oszlop) tényleg a magassággal szabályszerűen változnak.

Egy másik égitesten, a Sirius kisérőjén, a viszonyok lényegesen kedvezőbbek. Az asztronómiai adatok alapján itt 0·3 Å vörös eltolódás várható. Walter S. Adams[1] a Mount Wilson obszervatórium 100 hüvelykes reflektorával készített ezen égitest színképéről felvételeket. A lemezen két Sirius-spektrum közé fotografálta a kisérő színképét. A Siriuson magán a sű-

---

[1] Walter S. Adams: Proceedings Nat. Acad. Washington. 11. k. 1925 382. lap.

rűség oly kicsiny, hogy rajta az EINSTEIN-effektus elhanyagolható, tehát a Sirius színképe felhasználható, mint összehasonlítási színkép a mérések bázisául. A felvételeket három különböző módon, részben közvetlenül komparátorral, részben regisztráló fotometerrel mérték ki. A két összehasonlított színkép sajátságos intenzitáseloszlása következtében csak a H_β és H_γ hydrogén-vonalak voltak különösen alkalmasak a mérések céljára, de azért még néhány más vonalat is kimértek. Az egymás között jól egyező mérések 0·32 Å vörös eltolódást eredményeztek. Ez a várható értékkel jól egyezik. Másrészt G. Joos a viszonyok beható diszkussziója alapján arra az eredményre jut, hogy az adott körülmények között ezt az eltolódást más okok nem idézhették elő és így joggal lehet következtetni, hogy itt tényleg az EINSTEIN által megjósolt jelenséggel állunk szemben.

A speciális relativitáselméletben alapul vett koordinátarendszerekben, a LORENTZ-rendszerekben, a fény egyenes vonalban terjed. Ha most bevezetünk egy koordinátarendszert, mely ezekhez képest gyorsul, úgy a fény abban nem fog egyenes vonalban terjedni. Minthogy az ekvivalencia-elv alapján a gyorsuló koordinátarendszer gravitációs mezővel helyettesíthető, látjuk, hogy a fény gravitációs mezőben nem fog egyenes vonalban terjedni. Egy fénysugár, mely a Nap mellett, annak középpontjától a Nap sugarával, mint egységgel mért r távolságban halad el, eltérül

$$\delta = 1{\cdot}75'' \frac{1}{r} \tag{13}$$

szöggel. Ennek a jelenségnek a megfigyelése úgy történik, hogy teljes Napfogyatkozás alkalmával a Nap környezetét az égbolton, az ott látható csillagokat lefotografálják és az így nyert képet összehasonlítják az égbolt azon részének egy oly felvételével, mely más időpontban, a Nap távollétében készült. A Napfogyatkozás alkalmával készült felvételen a Nap környezetében lévő csillagok az égbolt azon pontjától, melyet a Napfogyatkozás alkalmával a Nap középpontja jelöl meg, távolabb kell hogy legyenek, mint a másik, a Nap távollétében készült felvételen. E radiális távolodás nagyságát (13) adja.

Az utóbbi évek Napfogyatkozásai alkalmával szisztematikusan kutattak ezen effektus után. Az 1922. évi Napfogyatkozás alkalmával CAMPBELL és TRÜMPLER négy felvételt tudtak készíteni, melyeken átlag 80 csillag volt látható. Ezek kimérése által nyert eredmények (13)-al összhangban vannak. Közvetlen a Nap szomszédságában lévő csillagok a felvételen természetesen nem láthatók. A Nap szélére ($r = 1$) vonatkozó δ érték azonban extrapolációval nyerhető. CAMPBELL és TRÜMPLER szerint

$$\delta = 1{\cdot}78'' \pm 0{\cdot}17''$$

teljes egyezésben a teoretikus várakozással. Megemlítendő, hogy miután az általános relativitáselmélet bemondása alapján az effektust megállapították, többen ad hoc felállított hipotezisek alapján igyekeztek azt magyarázni.

A fénysugarak gravitációs térben való görbülésén és a vörös eltolódáson kívül még egy jelenség van, melyre nézve az általános relativitás- és gravitációelmélet a tapasztalattal összehasonlítható. Míg ugyanis a klasszikus mechanika a kéttestproblémában nyugvó ellipszisekben való mozgásra vezet, addig az EINSTEIN-féle gravitációelmélet már itt, — a perturbációk figyelmen kívül hagyása mellett is — pozitív periheliummozgásra vezet. Több bolygónak, különösen a Merkurnak tényleg van ilyen, a klasszikus mechanika alapján a perturbációkból meg nem magyarázható perihelium-mozgása, azonban kvantitatív egyezés nincs.

Pogány B.

ÜBER DIE EXPERIMENTELLEN GRUNDLAGEN DER RELATIVITÄTSTHEORIE.

Verfasser berichtet über den Stand der auf die specielle und allgemeine Retativitätstheorie bezüglichen experimentellen Forschung, besonders über die neueren Wiederholungen des MICHELSON'schen Versuches. *B. Pogány.*

TANULÓVERSENYEK.

Jelentés az 1925. évi XXIX-ik mathematikai tanulóversenyről.

Az «Eötvös Loránd Math. és Phys. Társulat» XXIX-ik mathematikai tanulóversenyét 1925 október 17-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 37, Szegeden 2 versenyző jelentkezett, beadatott 27, illetőleg 1 dolgozat.

A verseny tételei a következők voltak:

1. Jelentsen a, b, c, d négy egész számot. Bebizonyítandó, hogy a

$$b-a,\ c-a,\ d-a,$$
$$d-c,\ d-b,\ c-b$$

különbségek szorzata osztható 12-vel.

2. Hány zérussal végződik 1000! a tizes számrendszerben felírva?

3. Bebizonyítandó, hogy a derékszögű háromszögbe irható kör sugara mindegyik befogó felénél és az átfogó negyedrészénél kisebb.

A bizottság egyhangú javaslata így hangzik:

A bíráló-bizottság örömmel állapította meg, hogy az idei tanulóversenyen három oly dolgozat érkezett be, amelyek a kitűzött tételeket kifogástalanul megoldották. Tisztelettel azt a javaslatot terjeszti a választmány elé, hogy, e három dolgozat között lényeges minőségbeli különbség nem lévén, az I. és II. «Eötvös Loránd-díj» összegének egy-egy harmada e dolgozatok készítőinek ítéltessék oda. Ezek névszerint: Fuchs Rudolf, a budapesti V. ker. áll. Bolyai-főreáliskolában *Szűcs Ernő*, *Gáspár Pál* és *Bodnár Lajos* tanítványa. Teller Ede, a budapesti tanárképző-intézeti gyakorló-főgimnáziumban *Oberle Károly* és *Szijártó Miklós* tanítványa. Tisza László, a budapesti II. ker. Mátyás király reálgimnáziumban *Makoldy Viktor* tanítványa.

A választmány e javaslatot egyhangúlag elfogadta azzal a hozzátevéssel, hogy a három díj mindegyike 150,000 koronára egészíttessék ki.

Jelentés az 1925. évi VII-ik fizikai tanulóversenyről.

Társulatunk «Károly Irén» fizikai tanulóversenyét 1925. évi október 24-én tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 19, Szegeden 3 versenyző jelentkezett, Budapesten 13, Szegeden 2 dolgozatot adtak be. A verseny feladatai a következők voltak:

1. Mekkora a másodperc inga hossza a Jupiter bolygó egyenlítőjén? E bolygó középsugara 11·14-szer akkora, mint a Földé, középsűrűsége

a Föld középsűrűségének negyedrésze, s forgási ideje 9 óra 55 perc 34 másodperc. (A Föld középsugara: 6370 km., középsűrűsége: 5·5.)

2. Kádban 0° fokú víz van és benne jégdarabok úszkálnak. A jég elolvadása után mennyit változik a víz felszínének magassága?

3. 2×3 cm-es filmképet 20 m távolságú ernyőre 4×6 m méretben akarunk vetíteni. Milyen gyújtótávolságú lencsét kell használni?

Mind a három feladatot megoldotta *Teller Ede* és *Fuchs Rudolf*, kik közül az első «Károly Irén díjat» a bíráló-bizottság javaslatára a választmány TELLER EDÉ-nek ítélte oda, ki a budapesti tanárképzőintézeti gyakorló-főgimnáziumban *Szíjártó Miklós* tanítványa volt, a második díjat pedig FUCHS RUDOLF-nak, ki a budapesti V. ker. áll. Bólyai főreáliskolában *Frőhlich Károly* tanítványa volt.

TÁRSULATI ÉLET.

1925. évben tartott XXX-ik közgyűlés.

E közgyűlést a Társulat 1925 május 14-én tartotta meg. A titkári jelentés szerint ebben az évben 8 előadóülésen 11 előadó 7 mathematikai tárgyú és 5 fizikai tárgyú előadást tartott. A Math. és Phys. Lapok XXXII-ik évfolyamából ez évre két, összesen körülbelül 10 ívnyi terjedelmű füzet jelent meg. A választmányból sorshúzás útján kiléptek: Bauer Mihály, Bláthy Ottó, Br. Harkányi Béla, Kőnig Dénes, Rohrer László, Szíjártó Miklós, kiket a közgyűlés újra egyhangúlag megválasztott.

Előadások: 1925 nov. 12. A mathematikai és fizikai tanulóversenyek eredményeinek kihirdetése. KŐNIG DÉNES: A végesből végtelenbe való következtetés egy módjáról. 1925 nov. 26. UJJ GYULA: A levegő hővezetéséről. 1925 dec. 10. STACHÓ TIBOR: Lineáris differenciál-egyenletek Heaviside-féle megoldásáról. 1926 jan. 28. TIHANYI MIKLÓS: Primärcsoportok. 1926 febr. 11. ORTVAY RUDOLF: A kvantumelmélet axiomatizálása Heisenberg és Born szerint. 1926 márc. 4. PATAI LÁSZLÓ: Végtelen számosságok problémái. GÁTI BÉLA: Az oceán-kábeltelegráfia újabb haladása, az oceán-telefonia mai állása. 1926 márc. 18. LASSOVSZKY KÁROLY: Az amerikai csillagvizsgáló-intéztézetek. 1926 ápr. 22. SZŰCS ADOLF: A bizottság jelentése a Kőnig Gyula-jutalom odaítéléséről.

Új tagok: *Bischitz László* tanárjelölt, Bpest; *Erdei-Grúz Tibor* egy. tanársegéd, Bpest; *Girsik Géza* főreálisk. tanár, Bpest; *Horváth Elemér* főreálisk. tanár, Bpest; *Hudetz Lipót* bencés tanár, Esztergom; *Kalmár László* tanárjelölt, Bpest; *Lehner Ödön* tanár, Bpest; *Mészáros László* keresk. tanár, Bpest; *Patai László* bizt. tisztviselő, Bpest; *vitéz Sándy Hugó* főreálisk. tanár, Bpest; *Teller Ede* technikus, Bpest; *Debreceni izraelita gimnázium,* Debrecen; *Kegyesrendi tanárképzőintézet,* Bpest.

Befizetett tagdíjak és adományok 1925. év április 1.-től 1926. év május 1.-ig.

(Ezrekben.)

Albert Anna (100), Ábrahám István (50), Balyi Ferenc (100), Baranyi András (100), Bauer Mihály (100), Benedek Jánosné (50), Benkő Ilona (51), Blau Ármin (50), Blau Ilona (50), Bodócs István (50), Bodola Lajos (50), Bogyó Samú (50), Bresztovszky Gyula (100), Breuer József (142), Bródy Imre (100), Csada Imre (51), Csaplár Konrád (50), Csegény Margit (50), Csizhegyi Lajos (97), Csősz László (50), Czakó Adolf (50), Czekeliusz Aurél (100), Éber József (100), Faragó Andor (50), Farkas Gyula (200), Frank János (140), Fraunhofer Lajos (50), Fábián Béla (100), Fenyvesi Andor (100), Finkey József (200), Forró Magdolna (50), Fröhlich Károly (50), Gáti Béla (200), Girsik Géza (50), Goldziher Károly (100), Gróh Gyula (200), Gyulai Zoltán (50), Hajós Géza (50), br. Harkányi Béla (200), Hartli Domokos (100), Hauszmann Alajos (150), Heuer Ede (50), Holenda Barnabás (50), Hoor Tempis Mór (150), Horváth Elemér (50), Hudetz Lipót (50), Ilosvay Lajos (150), Jakab Imre (50), Jurányi Henrik (50), Karai Sándor (50), Király László (50), Klug Lipót (50), Kohn Jolán (50), Kopp Lajos (50), Koren Dénes (50), Koronczy Teofil (50), Koschovitz Gyula (50), Krbeck Ferenc (50), Kresznerits Károly (100), Kuraila Péter (50), Lajta Ernő (100), Lassovszky Károly (50), Lehner Ödön (50), Lóky Béla (90), Luckhaub Gyula (50), Magdics Gáspár (50), Marcell György (100), Mihalovits Alajos (50), Molnár Imre (50), Molnár Tibor (50), Müller József (100), Sz. Nagy Gyula (90), Nagy József (100), Neubold Özséb (50), Neustadt Lipót (50), Nyáry Béla (100), Oltay Károly (150), Ortvay Rudolf (50), Oszlaczky Szilárd (100), Palatin Gergely (100), Pécsi Albert (50), Pogány Béla (50), Radó Simon (100), Rados Gusztáv (50), Rados Ignác (50), Renner János (50), Reuss Endre (50), Richter Rezső (100), Riegl Sándor (50), Riesz Frigyes (100), Rhorer László (50), Róna Zsigmond (50), Rucsinszky Lajos (50), Rybár István (50), Sasváry Géza (50), Sándy Hugó (50), Sárközy Pál (50), Schay Géza (140), Schimanek Emil (150), Sós Ernő (100), Söpkéz Sándor (150), Strausz Hermann (50), Szabó Gábor (50), Szalay-Újfalusy László (50), Szarvasy Imre (150), Széky István (50), Sziklay Jenő (100), Szily Kálmán (150), Szőke Béla (50), Szűcs Adolf (100), Tangl Károly (100), Tass Antal (100), Tihanyi Miklós (100), Tobisch János (50), Tóth Aladár (50), Török Elemér (50), Turcsányi István (50), Vadászy Bertalan (40), Vámos Sándor (100), Veress Pál (100), Vörös Cyrill (50), Winter József (50), Wittmann Ferenc (50), Békéscsaba: Ág. h. ev. főgimn. (50), Bicske: Áll. polg. (50), Budapest: Széchenyi főgimn. (50), Cisz. tanárképző (50), Kegyesrendi tanárképző (50), Debrecen: Zsidó reálgimnázium (50), Gödöllő: Premontrei főgimn. (50), Hajdunánás: Ev. ref. főgimn. (50), Jászberény: Kir. kath. főgimn. (50), Karcag: Ev. ref. főgimn. (50), Kisújszállás: Állami főgimn. (50), Makó: Állami főgimn. (50), Miskolcz: Ev. ref. főgimn. (50), Sopron: Állami főreál. (50), Bányászati főiskola (100), Székesfehérvár: Áll. főreál. (50).

Adományok.

M. Kir. Tudományos Akadémia 15.000,000
Ganz Villamossági R. T. 5.000,000
Károly Irén 4.400,000
Franklin-Társulat 2.500,000
br. Ullmann György 250,000
Kresznerits Károly 100,000
N. N. 250,000

A tagsági díjat a választmány 1925. jan. 1-től 3 aranykoronában (50,000 papirkoronában) állapította meg.

Az 1926. évi május hó 22-én tartott közgyűlés 1927. január 1.-i hatállyal a tagdíjakat felemelte, budapesti tagok számára 8 pengőre, vidéki tagok számára 6 pengőre.

Minthogy a Mathematikai és Physikai Lapok egyes régibb évfolyamai teljesen elfogytak, kérjük tisztelt tagtársainkat, akik azokat nélkülözhetik, bocsássák a Társulat rendelkezésére.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a mathematikai tárgyúak *Fejér Lipót* (**V., Falk Miksa-utca 15.**), a fizikai tárgyúak pedig *Pogány Béla* (**I., Budafoki-út 8.**) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikban lehető rövidségre törekedjenek, azokhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek és hogy arra pontos címüket írják rá. Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Pogány Béla* titkár címére küldendők.

A folyóirat és a meghivók expedíciójára vonatkozó kérdések, reklamációk, valamint a tagsági és előfizetési díjak *Nagy József* pénztáros címére (IV., Váci-utca 31—33.) intézendők.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *B. Pogány*, Budapest, I., Budafoki-út 8.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du sécretaire *B. Pogány*, Budapest, I., Budafoki-út 8.

Felhívás tagtársainkhoz!

A rendkívüli viszonyok súlyos helyzetbe sodorták Társulatunkat. Folyóiratunkat még redukált terjedelemben sem tudtuk volna megjelentetni, ha a tudományt megbecsülő, áldozatkész emberbarátok és intézmények nem jöttek volna segítségünkre. Ez a Társulatunk iránt megnyilvánuló bizalom mi ránk is kötelezettséget ró. Nekünk is erőnkhöz képest meg kell tennünk mindent, hogy Társulatunkat fenntartsuk és annak működését minél intenzivebbé tegyük. Ezt követeli tőlünk józanul felfogott saját érdekünk, ezt követeli hazánk érdeke is. Csak így alakul ki bennünk a jövőnk biztosításához annyira szükséges bizalmunk önmagunkhoz.

Kérjük ennélfogva tisztelt tagtársainkat,

1. hogy hátralékos tagdíjaikat (évenkint 3 aranykoronát) szíveskedjenek *Nagy József* pénztárnoknak (IV., Váci-utca 31-33.) lehetőleg a mellékelt csekklap felhasználásával befizetni,

2. hogy megváltozott új címeiket közöljék a Társulat pénztárosával és hogy a világháború alatt és az utána következő időkben költözködésre kényszerített tagtársaink figyelmét hívják fel hasonló cselekedetre,

3. hogy gyüjtsenek új tagokat.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA : GÉCZY KÁLMÁN.

MATHEMATIKAI

ÉS

PHYSIKAI LAPOK

AZ EÖTVÖS LORÁND

MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT MEGBIZÁSÁBÓL

SZERKESZTIK

FEJÉR LIPÓT ÉS POGÁNY BÉLA

HARMINCHARMADIK ÉVFOLYAM

1926

JULIUS—DECEMBERI FÜZET

BUDAPEST 1926

A MAGYAR TUDOMÁNYOS AKADÉMIA TÁMOGATÁSÁVAL KIADJA

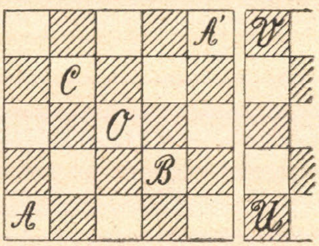
AZ EÖTVÖS LORÁND MATHEMATIKAI ÉS PHYSIKAI TÁRSULAT

TARTALOMJEGYZÉK.

LÓUGRÁS A VÉGTELEN SAKKTÁBLÁN.

Célom bebizonyitani, hogy *a végtelen sakktábla úgy futható be lóugrásoknak (mindkét értelemben határtalan) sorozatával, hogy minden mezőre egyszer és csak egyszer érünk.*

1. Az 5^2 mezős véges tábla befutása. Jelentse (1. ábra) O valamely 5^2 mezős véges táblán a középső mezőt, A pedig



1. ábra.

7	12	19	24	5
20	**25**	6	13	18
11	8	17	4	23
16	21	2	9	14
1	10	15	22	3

2. ábra.

valamelyik sarok-mezőt; B és C legyenek az A-t nem tartalmazó diagonálisnak O-val érintkező mezői.

A-ból akár B-be, akár C-be az 5^2 mezős táblán lóugrásokkal úgy juthatunk, hogy minden mezőre éppen egyszer érünk.

A-ból C-be a kívánt módon úgy juthatunk, hogy a mezőket a 2. ábrában látható számozás rendjében futjuk be.*

---

* Az 5×5 mezős tábla számos lóugrásos befutását tartalmazza Euler híres értekezése: *Sulution d'une question curieuse qui ne paroit soumise à aucune analyse,* Histoire de l'Académie, Berlin 15. köt., (bemutatva 1756., kinyomatva 1761., a címlapon hibásan 1766-os évszámmal), 310—337. lap. (L. különösen a 36—40. §-t a 332—335. lapon.) A fenti 2. ábra a 335 lap második ábrájától csak az 5.—25. mező fordított számozásában különbözik.

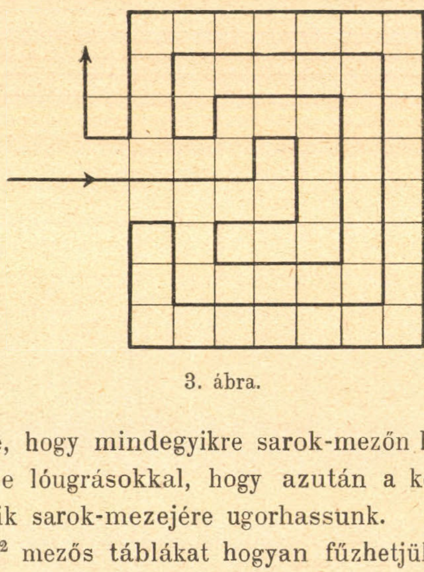
Ha A-ból B-be akarunk jutni, csak a sorok és oszlopok szerepét kell felcserélnünk.

2. Átlépés 5^2 mezős tábláról vele szomszédosra. *Két egymás mellé tett 5^2 mezős tábla közül bármelyik, ennek bármely sarok-mezejéből kiindulva, úgy futható be lóugrásokkal, hogy az utoljára elért mezőről a másik táblának legközelebb eső sarok-mezejére lóugrással juthatunk.*

Valóban az 1. ábrában a bal táblán akár A-ból, akár A'-ből eljuthatunk B-be és innen lóugrással a másik tábla U mezejére.

Hasonló módon juthatunk a bal tábla másik két sarok-mezejéből V-be.

3. A végtelen tábla befutása. A végtelen sakktáblát 5^2 mezős véges táblákra bontjuk. Ezeket alkalmas sorrendben



3. ábra.

úgy futjuk be, hogy mindegyikre sarok-mezőn lépünk s onnan úgy járjuk be lóugrásokkal, hogy azután a következő táblának valamelyik sarok-mezejére ugorhassunk.

Hogy az 5^2 mezős táblákat hogyan fűzhetjük egy sorozatba, az a 3. ábrán látható. Rajta minden rácspont egy-egy 5^2 mezős táblát képvisel. Hogy e táblákat milyen egymásutánban futjuk be, azt a végtelenből benyúló vízszintes és ennek kanyargó folytatása mutatja.

Kürschák József.

RÖSSELSPRUNG AUF DEM UNENDLICHEN SCHACHBRETTE.

Es wird mit dem Springer das unendliche Schachbrett in einem (nach beiden Richtungen unendlichen) Zuge so durchlaufen, dass er jedes Feld nur einmal betritt.

Zu diesem Zwecke wird das unendliche Brett in Quadrate von 5×5 Feldern eingeteilt. Jedes Quadrat wird in einem Eckfelde betreten und so durchlaufen, dass dann das nächste Quadrat wieder in einem Eckfelde betreten werden kann. Die Zusammenfügung der Quadrate in eine Folge ist in Figur 3 dargestellt, wo die Quadrate durch Punkte vertreten sind.

J. Kürschák.

AZ INTERPOLÁCIÓRÓL.

Bevezetés.

Legyen C a komplex x változó síkjában megadott egyszerű zárt görbe (JORDAN-féle görbe). Válasszunk a C görbén előbb egy $x_1^{(1)}$ helyet, majd két egymástól különböző $x_1^{(2)}$, $x_2^{(2)}$ helyet, azután három, egymástól különböző $x_1^{(3)}$, $x_2^{(3)}$, $x_3^{(3)}$ helyet, s. í. t.; általában k, egymástól különböző $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ helyet ($k=1$, 2, 3,...). Az x-nek minden, a C görbén értelmezett $f(x)$ függvényéhez megalkothatjuk az

$$L_1(x),\ L_2(x),\ L_3(x), \ldots,\ L_k(x), \ldots \tag{1}$$

polinomsorozatot, ahol általánosan $L_k(x)$ az a k-nál alacsonyabb fokszámú racionális egész függvény, amely az $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ helyeken rendre ugyanazokat az értékeket veszi fel, mint $f(x)$: szóval *$L_k(x)$ az $f(x)$ függvényt az $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ helyeken interpoláló* LAGRANGE*-féle polinom.*

Kérdés, vajjon választható-e az

$$\begin{array}{l} x_1^{(1)}, \\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)}, \\ x_1^{(3)},\ x_2^{(3)},\ x_3^{(3)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^{(k)},\ x_2^{(k)}, \ldots,\ x_k^{(k)} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \tag{2}$$

helyek sorozata egyszersmindenkorra úgy, hogy valahányszor $f(x)$ a C görbe *zárt belsejében* (vagyis belső és kerületi pontjainak összességén) reguláris függvény, az (1) sorozat a C görbe zárt belsejében egyenletesen $f(x)$-hez konvergáljon?

Ezt a kérdést abban a speciális esetben, amikor a C görbe kör, RUNGE[1] vetette fel és oldotta meg, bebizonyítván, hogy $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ gyanánt a körbe írt szabályos k-szög szögpontjait választva, a (2) alatti kettős pontsorozatnak megvan a kívánt tulajdonsága.

Később FEJÉR[2] fogalmazta meg e kérdést a fenti határozott formában, s meg is oldotta, amennyiben bármely JORDAN-féle C görbéhez szerkesztett ily tulajdonságú (2) interpolálóhelysorozatot. Vizsgálataiban lényeges szerepe van a C görbe külsejének kör külsejére való kölcsönösen egyértelmű s a végtelen távoli helyet megtartó konformis leképezésének.[3]

A konformis leképezés elméletének alaptétele szerint adott JORDAN-féle C görbéhez mindig tartozik oly pozitív r sugár és oly, a C görbe külsején reguláris $z = \varphi(x)$ függvény, mely az $x = \infty$ helyen a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 1 \tag{3}$$

feltételnek megfelelően viselkedik s amely a C görbe külsejét a $|z| > r$ körkülsőre kölcsönösen egyértelműen leképezi; e feltételek r-et és a $\varphi(x)$ függvényt egyértelműen meghatározzák. CARATHÉODORY vizsgálataiból[4] tudjuk, hogy $\varphi(x)$ értelmezhető a C görbén úgy, hogy folytonos maradjon akkor is, ha a C görbe külsejéhez kerületét is hozzászámítjuk és a C görbe így kapott

---

[1] C. RUNGE: *Theorie und Praxis der Reihen,* Sammlung SCHUBERT XXXII. (1904); 136. oldal.

[2] FEJÉR L.: *Interpolation und konforme Abbildung,* Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1918; 319—331. oldal.

[3] Ki fog tűnni, hogy a konformis leképezés a dolog természetéhez szabott segédeszköz. — Legújabban FEKETE enélkül a segédeszköz nélkül, teljesen elemi úton szerkesztett bármely JORDAN-féle C görbéhez a kívánt tulajdonsággal bíró (2) interpolálóhelysorozatot: FEKETE M.: *Über Interpolation,* Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, 6. (1926); 410—413. oldal.

[4] C. CARATHÉODORY: *Über die gegenseitige Beziehung der Ränder bei der konformen Abbildung des Inneren einer* JORDAN*sche Kurve auf einen Kreis,* Mathematische Annalen, 73. (1913); 305—320. oldal.

zárt külsejét a $|z| \geqq r$ zárt körkülsőre képezi le kölcsönösen egyértelműen.

Már most FEJÉR[2] bebizonyította, hogy ha a (2) helyeket úgy választjuk, hogy a $z = \varphi(x)$ leképezés létesítette képeik, a

$$\begin{array}{llll} z_1^{(1)}, & & & \\ z_1^{(2)}, & z_2^{(2)}, & & \\ z_1^{(3)}, & z_2^{(3)}, & z_3^{(3)}, & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ z_1^{(k)}, & z_2^{(k)}, \ldots, & z_k^{(k)}, & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array} \tag{4}$$

helyek (ahol $z_l^{(k)} = \varphi(x_l^{(k)})$, $k = 1, 2, 3, \ldots$; $l = 1, 2, 3, \ldots, k$) a $|z| = r$ körbe írt szabályos k-szög szögpontjai,[5] akkor megvan a kívánt tulajdonságuk: ha $f(x)$ a C görbe zárt belsejében reguláris függvény, akkor ott egyenletesen

$$\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x). \tag{5}$$

Dolgozata végén[6] FEJÉR oly megjegyzést tesz, amelyből látszik, hogy ehhez elegendő a (2) interpolálóhelyeket általánosabban úgy megválasztani, hogy a nekik megfelelő (4) alatti *képhelyek* a következő értelemben[7] *egyenletesen* oszoljanak el a $|z| = r$ körön: ha γ a $|z| = r$ kör valamely tetszésszerinti íve,[8] σ a γ

[5] Ilyen eloszlású (2) helyek, potenciálelméleti jellemzéssel, először HILBERT vizsgálataiban fordulnak elő: D. HILBERT: *Über die Entwickelung einer beliebigen analytischen Funktion einer Variabeln in eine unendliche nach ganzen rationalen Funktionen fortschreitende Reihe*, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Klasse, 1897; 63—70. oldal.

[6] Idézett hely, 331. oldal.

[7] Ez a fogalom abban a speciális esetben, amikor $z_l^{(k)} = z_l$ független k-tól ($k = 1, 2, 3, \ldots$; $l = 1, 2, \ldots, k$), WEYLtől származik: H. WEYL: *Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins*, Mathematische Annalen, 77. (1916); 313—352. oldal.

[8] A körívhez mindig hozzászámítom azt a végpontját, amelyik a körívnek az óramutató járásával ellenkező befutásánál előbb következik, a másikat ellenben nem.

ív hosszúsága és a $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_k^{(k)}$ helyek közül ν_k számú van a γ íven, akkor

$$\lim_{k=\infty} \frac{\nu_k}{k} = \frac{\sigma}{2\pi r}. \tag{6}$$

Dolgozatomban bebizonyítom, hogy ez a FEJÉR-féle *elegendő* feltétel egyúttal *szükséges*[9] is, úgy, hogy érvényes a következő tétel:

I. *Legyenek az* $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ *interpoláló helyek* $(k=1, 2, 3, \ldots)$ *a* JORDAN*-féle* C *görbén. Jelöljék* $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_k^{(k)}$ *rendre ezek képeit annál a* $z=\varphi(x)$ *kölcsönösen egyértelmű, konformis, a kerületen folytonos leképezésnél, amely a* C *görbe külsejét kör külsejébe viszi át úgy, hogy a két sík végtelen távoli ívelemei «nyujtás és forgatás nélkül», azaz a*

$$\lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = 1$$

feltételnek megfelelően egymásba menjenek át; r *legyen a kör sugara. Ahhoz, hogy, valahányszor* $f(x)$ *a* C *görbe zárt belsejében reguláris függvény és* $L_k(x)$ *jelenti az* $f(x)$ *függvényt*

---

[9] Azt, hogy a (2) helyek milyen tulajdonsága *szükséges és elegendő* ahhoz, hogy (5) bármely, a C görbe zárt belsejében reguláris $f(x)$ függvényre nézve ott egyenletesen fennálljon, először FABER vizsgálta meg: G. FABER: *Über* TSCHEBYSCHEFF*sche Polynome,* Journal für die reine und angewandte Mathematik, 150. (1920); 79—106. oldal. FABER a (2) helyek kívánt tulajdonságát a C görbének az

$$|x - x_1^{(k)}| \cdot |x - x_2^{(k)}| \cdot \cdots \cdot |x - x_k^{(k)}| = \text{konstans } (= r^k) \tag{$\star$}$$

lemniszkátákkal való megközelíthetőségével jellemzi. Vizsgálatait FEKETE egészítette ki: FEKETE M.: *Approximation von Kurven durch Lemniscaten und Approximation von analytischen Funktionen durch Polynome* (legközelebb meg fog jelenni a Mathematische Zeitschriftben). FABER — bebizonyítás nélkül — utal arra is, hogy a C görbének a ($\star$) lemniszkátákkal való megközelíthetősége egyrészt (8) teljesülésével, másrészt a (2) helyeknek a C görbén való határozott asszimptotikus eloszlásával kapcsolatos. Ez a (potenciálelméletileg jellemzett) eloszlás abban a — mindenesetre legfontosabb — speciális esetben, amikor a C görbe egyetlen analitikai ívből áll (s FABER csak ezt az esetet tárgyalja), végelemzésben ugyanaz, mint a dolgozatom I. tételében jellemzett eloszlás.

az $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ *helyeken interpoláló* LAGRANGE-*féle polinomot, azaz azt a legfeljebb* $k-1$*-edfokú racionális egész függvényt, amely e helyeken rendre az* $f(x_1^{(k)}), f(x_2^{(k)}), \ldots, f(x_k^{(k)})$ *értékeket veszi fel, a* C *görbe zárt belsejében egyenletesen*

$$\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x)$$

legyen, szükséges és elegendő, hogy a $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_k^{(k)}$ *helyek* ($k=1, 2, 3, \ldots$) *egyenletesen oszoljanak el a* $|z| = r$ *körön, azaz, ha* γ *e kör bármely íve,* ν_k *a* $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_k^{(k)}$ *képhelyek közül a* γ *íven levők száma,*

$$\lim_{k=\infty} \frac{\nu_k}{k} = \frac{\sigma}{2\pi r}$$

legyen, ahol σ *a* γ *ív hosszúsága.*

Eszerint ahhoz, hogy (5) bármely, a C görbe zárt belsejében reguláris $f(x)$ függvényre nézve ott egyenletesen teljesüljön, mindenesetre szükséges a (2) helyeknek a következő értelemben vett «*mindenütt sűrű*» eloszlása: ha Γ a C görbe bármely íve, elég nagy k esetén az $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ helyek közül legalább egy a Γ íven van. De hogy ez a feltétel magában véve nem elegendő, az következik már abból, hogy, mint FEJÉR megjegyzi,[10] példa adható a (2) helyek oly választására, amelynél ez a «mindenütt sűrű» eloszlás megvan s mégis C belsejének minden zárt G részéhez található oly, a C görbe zárt belsejében reguláris $f(z)$ függvény, hogy a hozzátartozó (1) sorozat G minden helyén széttartó.

Bebizonyitásom közben részleteredményként a következő, magában véve is érdekes tételhez jutok:

II. *Legyenek az* $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ *interpolálóhelyek* ($k=1, 2, 3, \ldots$) *a* JORDAN-*féle* C *görbe zárt belsejében* (tehát nem szükségképpen magán a C görbén). *Jelölje* $\varphi_k(x)$ *a* C *görbe külsején egyértékű, reguláris ágakra széteső*

$$\left\{(x - x_1^{(k)}) \cdot (x - x_2^{(k)}) \cdot \ldots \cdot (x - x_k^{(k)})\right\}^{\frac{1}{k}}$$

---

[10] Idézett hely, 320. oldal.

függvénynek azt az ágát, amelyik a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi_k(x)}{x} = 1 \tag{7}$$

feltételnek megfelel. Ahhoz, hogy, valahányszor $f(x)$ a C görbe zárt belsejében reguláris függvény és $L_k(x)$ jelenti az $f(x)$ függvényt az $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ helyeken interpoláló Lagrange-*féle polinomot, a C görbe zárt belsejében egyenletesen*

$$\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x)$$

legyen, szükséges és elegendő, hogy C külsején mindenütt

$$\lim_{k=\infty} \psi_k(x) = \varphi(x) \tag{8}$$

legyen, ahol $z = \varphi(x)$ az a C görbe külsején reguláris, C zárt külsején folytonos függvény, mely C külsejét kölcsönösen egyértelműen leképezi valamely körkülsőre úgy, hogy a két sík végtelen távoli ívelemei nyujtás és forgatás nélkül egymásba menjenek át.

E tételnek bebizonyításánál döntő szerepe van Montel kiválasztási tételének.[11] Hogy e tétel alkalmazása jelölési kényelmetlenséget ne okozzon, a (2) helyek helyett valamivel általánosabban először n_1 számú $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}$ helyet, majd n_2 számú $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)}$ helyet, azután n_3 számú $x_1^{(3)}, x_2^{(3)}, \ldots, x_{n_3}^{(3)}$ helyet, s. í. t.; általában n_k számú $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}$ helyet választok a C görbén, illetőleg C zárt belsejében ($k = 1, 2, 3 \ldots$), ahol $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots$ tetszésszerinti, csak a

$$\lim_{k=\infty} n_k = \infty \tag{9}$$

feltételnek alávetett természetes számok. A bebizonyításnál nem használom ki, s ezért fel sem kell tennem, hogy az $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}$ helyek egymástól különbözők; $L_k(x)$-en *az $f(x)$ függvényt az $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}$ helyeken interpoláló* Lagrange-Hermite-*féle*

[11] P. Montel: *Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe,* Collection Borel, (1910); 22. oldal.

polinomot, azaz azt az n_k-nál alacsonyabb fokszámú racionális egész függvényt értem, amely oly tulajdonságú, hogy e helyek az $f(x) - L_k(x)$ függvénynek rendre legalább annyiszoros zérushelyei, mint az

$$\omega_k(x) = (x - x_1^{(k)}).(x - x_2^{(k)}).\cdots.(x - x_{n_k}^{(k)}) \tag{10}$$

polinomnak $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Ha bármely, a C görbe zárt belsejében (amelyet $\bar{B}$-sal jelölök, míg C nyilt, azaz kerületi pontjai kizárásával képezett belsejét egyszerűen B-vel) reguláris $f(x)$ függvényre nézve (5) $\bar{B}$-ban egyenletesen áll, akkor az

$$\begin{array}{c} x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{n_1}^{(1)}, \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{n_2}^{(2)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array} \tag{11}$$

helyeket dolgozatomban *jól interpoláló* helyeknek mondom.

A (6) feltétel helyébe a

$$\lim_{k=\infty} \frac{\nu_k}{n_k} = \frac{\sigma}{2\pi r} \tag{12}$$

feltétel jő, ahol most ν_k a $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_{n_k}^{(k)}$ helyek közül, ahol $z_l^{(k)} = \varphi(x_l^{(k)})$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$, a γ íven levők számát jelenti $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. A (8) feltételben pedig $\psi_k(x)$ az $\{\omega_k(x)\}^{\frac{1}{n_k}}$ függvénynek a C görbe nyilt (azaz kerületi pontjainak kizárásával képezett) külsején (amelyet K-val fogok jelölni, míg C zárt külsejét $\bar{K}$-sal) reguláris és egyértékű ágai közül a (7) feltétellel meghatározottat jelenti. Igy az I., illetőleg II. tétel a valamivel általánosabb V., illetőleg III. tétel speciális eseteként jelentkezik.

Dolgozatom I. fejezetében a III. tétel részletes bebizonyításával foglalkozom; e fejezetben a (11) interpolálóhelyek akár a C görbén, akár ennek belsejében lehetnek. A III. tétel bebizonyításának módja egyuttal abban az általánosabb esetben is, amikor a (8) határérték C nyilt külsejének minden egyes helyén létezik ugyan, de nem szükségképpen $\varphi(x)$, a *legszűkebb* oly T tartomány meghatározására vezet, hogy $f(x)$-nek a T tartományban reguláris viselkedése elegendő ahhoz, hogy (5) a $\overline{B}$ tartományban egyenletesen teljesüljön (IV. tétel). Dolgozatom II. fejezetében pedig bebizonyítom az V. tételt; e fejezetben már feltételezem, hogy a (11) interpolálóhelyek a C görbe kerületén vannak.

I. A jól interpoláló helyek és a konformis leképezés.

1. E fejezetnek célja annak bebizonyítása, hogy ahhoz, hogy a JORDAN-féle C görbe $\overline{B}$ zárt belsejének (11) helyei jól interpoláló helyek legyenek, szükséges és elegendő, hogy a K tartomány minden x helyén

$$\lim_{k=\infty} \psi_k(x) = \varphi(x) \tag{8}$$

legyen. Mindenekelőtt a feltétel szükségességének bebizonyításával foglalkozom.

A

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x), \ldots,\ \psi_k(x), \ldots \tag{13}$$

függvénysorozat tagjai a következő tulajdonságokkal bírnak:

α) A $\psi_k(x)$ függvény $(k=1, 2, 3, \ldots)$ a K tartományban reguláris, egyértékű függvény; az $x=\infty$ helyen a (7) feltételnek megfelelően viselkedik.

β) A $\psi_k(x)$ függvény $(k=1, 2, 3, \ldots)$ a $\overline{K}$ tartomány minden helyén folytonos.

γ) A (13) függvénysorozat tagjai a $\overline{K}$ tartomány minden korlátos részében egyenletesen korlátosak.

Ugyanis, ha K' a $\overline{K}$ tartomány valamely korlátos résztartománya és D jelöli K' pontjainak a $\overline{B}$ tartomány pontjaitól való távolsága felső határát, akkor

$$|\psi_k(x)| = \left\{ |x - x_1^{(k)}| . |x - x_2^{(k)}| . \cdots . |x - x_{n_k}^{(k)}| \right\}^{\frac{1}{n_k}} \leqq D.$$

Ha a (11) helyek jól interpoláló helyek, akkor ezekhez járul még a következő tulajdonság:

δ) Ha a a K tartomány valamely helye, akkor, hacsak k elég nagy $(k \geqq k_0 = k_0(a))$, a C görbe minden x helyén

$$|\psi_k(x)| \leqq |\psi_k(a)|. \tag{14}$$

Ugyanis, mint ismeretes és könnyen verifikálható is, az

$$f(x)=\frac{1}{a-x}$$

függvényre nézve — amely a $\overline{B}$ tartományban reguláris —

$$L_k(x)=\frac{1}{a-x}\left\{1-\frac{\omega_k(x)}{\omega_k(a)}\right\};$$

ezért, ha d jelöli az a helynek a $\overline{B}$ tartomány pontjaitól való legnagyobb távolságát, a $\overline{B}$ tartományban

$$|f(x)-L_k(x)|=\left|\frac{1}{a-x}\,\frac{\omega_k(x)}{\omega_k(a)}\right|\geqq\frac{1}{d}\left|\frac{\omega_k(x)}{\omega_k(a)}\right|;$$

de, ha a (11) helyek jól interpoláló helyek, akkor bizonyos k-tól kezdve $\overline{B}$ minden helyén

$$|f(x)-L_k(x)|\leqq\frac{1}{d},$$

tehát $\overline{B}$ minden helyén, s így a C görbén is

$$|\omega_k(x)|\leqq|\omega_k(a)|,$$

amiből (14) következik.

A bebizonyításnál nem használom ki a $\psi_k(x)$ függvények speciális jelentését, csak az *α)—δ)* tulajdonságokat, úgy, hogy tulajdonképpen azt bizonyítom be, hogy minden oly függvénysorozat, amelynek megvan e négy tulajdonsága, a K tartomány minden x helyén a $\varphi(x)$ leképezőfüggvényhez közeledik.

2. MONTEL kiválasztási tételéből [11] egyszerűen adódik a következő segédtétel:

I. segédtétel. Legyenek

$$\psi_1(x),\ \psi_2(x),\ldots,\ \psi_k(x),\ldots \tag{13}$$

a komplex x változónak valamely [12] *nyilt K tartományban reguláris és K minden korlátos zárt részében egyenletesen korlá-*

---

[12] Ez a kitétel azt jelenti, hogy itt a K tartomány nem szükségképpen az eddig szóbanforgott K tartományt jelenti; hasonló megjegyzés érvényes a $\psi_k(x)$ $(k=1, 2, 3,\ldots)$, $\varphi(x)$ függvényekre is.

tos függvényei. Ha a (13) *sorozat bármely részsorozata, amely K minden helyén összetartó, ugyanahhoz a $\varphi(x)$ függvényhez közeledik, akkor K minden x helyén*

$$\lim_{k=\infty} \psi_k(x) = \varphi(x). \tag{8}$$

Bebizonyítás: Ha (8) nem állana K minden egyes helyén, akkor volna K-nak oly x_0 helye, továbbá oly pozitív ε és k-nak végtelen sok természetes egész $k^{(1)}, k^{(2)}, k^{(3)},\ldots$ értéke, hogy $\nu = 1, 2, 3,\ldots$ esetén

$$|\psi_{k^{(\nu)}}(x_0) - \varphi(x_0)| > \varepsilon; \tag{15}$$

Montel kiválasztási tétele szerint a

$$\psi_{k^{(1)}}(x),\ \psi_{k^{(2)}}(x),\ \psi_{k^{(3)}}(x),\ldots$$

sorozatból ki lehetne egy, K minden helyén összetartó (még hozzá K minden korlátos, zárt részében egyenletesen összetartó) részsorozatot választani; e sorozat határértéke az x_0 helyen a feltevés szerint $\varphi(x_0)$ volna, (15) ellenére.

Eszerint az 1. szakasz elején kimondott feltétel szükségességének bebizonyítására elegendő kimutatnom, hogy az *a)—δ)* feltételekből következik, hogy a (13) sorozat bármely, az egész K tartományban összetartó részsorozatának határfüggvénye $\varphi(x)$. A részsorozat k-adik tagját ismét $\psi_k(x)$-szel jelölhetem ($k = 1, 2, 3,\ldots$);[13] úgy, hogy elegendő arra az esetre szorítkoznom, amikor a (13) függvénysorozatnak az *a)—δ)* tulajdonságokon kívül még a következő tulajdonsága van:

ε) A

$$\lim_{k=\infty} \psi_k(x) = \psi(x) \tag{16}$$

határérték a K tartomány minden egyes helyén létezik.

[13] Az ilymódon $\psi_1(x), \psi_2(x),\ldots, \psi_k(x),\ldots$-szel jelölt függvények sorozata ugyanúgy keletkezik egy, a (11) alattihoz hasonló szerkezetű kettős pontsorozatból, — amelyet ismét úgy jelölhetek, mint a (11) kettős pontsorozatot, — mint az eredeti (13) függvénysorozat az eredeti (11) kettős pontsorozatból. Ennek a megjegyzésnek, illetőleg jelölésnek később lesz jelentősége, amikor majd ismét felhasználom a $\psi_k(x)$ függvények speciális jelentését.

Más szóval: elegendő azt bebizonyítanom, hogy a (13) sorozat *α)*—*ε)* tulajdonságaiból következik, hogy $\psi(x) = \varphi(x)$.

3. Vitali nevezetes konvergenciatétele[14] szerint (vagy akár Stieltjes egy régebbi tétele szerint is) az *α)*, *γ)*, *ε)* tulajdonságokból következik, hogy a (13) függvénysorozat K minden korlátos, zárt részében *egyenletesen* összetartó. Ebből pedig könnyen adódik a $\psi(x)$ határfüggvény következő két tulajdonsága:

α') A $\psi(x)$ függvény a K tartományban reguláris, egyértékű függvény; az $x = \infty$ helyen a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1 \tag{17}$$

feltétellel leírt módon viselkedik.

γ') A $\psi(x)$ függvény a K tartomány minden korlátos részében korlátos.

A *β)* és *δ)* tulajdonság hozzávételével még $\psi(x)$ következő tulajdonsága adódik:

δ') Ha $\lambda > 1$, akkor van oly C' Jordan-féle görbe, hogy C a C' görbének nyilt belsejében van és valahányszor a a K tartomány valamely helye, a C és C' görbék határolta nyilt gyűrűtartomány minden x helyén

$$|\psi(x)| \leqq \lambda |\psi(a)|. \tag{18}$$

Ugyanis (14) szerint, hacsak k elég nagy, a C görbén, minthogy ott $|\varphi(x)| = r$,

$$\left|\frac{\psi_k(x)}{\varphi(x)}\right| \leqq \frac{|\psi_k(a)|}{r}. \tag{19}$$

A $\dfrac{\psi_k(x)}{\varphi(x)}$ függvény a K tartományban mindenütt reguláris, (3) és (7) miatt még az $x = \infty$ helyen is; a $\overline{K}$ tartományban pedig folytonos. Ezért (19) a K tartományban is érvényes, úgy, hogy ha $\lambda > 1$, akkor, C'-vel a

$$|\varphi(x)| = \lambda r$$

[14] G. Vitali: *Sopra le serie di funzioni analitiche*, Rendiconti del Reale Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, II. 36. (1903); 772—774. oldal.

görbét jelölve (amely oly JORDAN-féle, sőt, analitikai görbe, melyen C belül van), a C és C' görbék határolta

$$r < |\varphi(x)| < \lambda r$$

nyilt gyűrűtartományban

$$|\psi_k(x)| \leqq \frac{|\psi_k(a)|}{r} |\varphi(x)| < \lambda |\psi_k(a)|.$$

Innét határátmenettel (18) adódik.

Be fogom bizonyítani, hogy a $\psi(x)$ függvény *a'), γ')* és *δ')* tulajdonságaiból következik, hogy $\psi(x)$ azonos $\varphi(x)$-szel. E célból elegendő lesz kimutatnom e tulajdonságok alapján, hogy az a $\mathfrak{K}$ kép, amelyet a $z = \psi(x)$ függvény a K tartományról a z síkon létesít, valamely egyrétű $|z| > r$ körkülső.

4. A z sík valamely z_0 pontját a $\mathfrak{K}$ kép ν-szörös pontjának lehet nevezni, ha a

$$\psi(x) = z_0 \tag{20}$$

egyenletnek a K tartományban, többszörösség szerint számlálva, ν számú gyöke van; itt ν jelenthet zérust, pozitív egész számot, vagy végtelent. Nem tekintem kivételnek a $z_0 = \infty$ pontot sem, amely, mint az $x = \infty$ pont képe, $\mathfrak{K}$ egyszeres pontjának számít, mert az *a')* tulajdonság szerint az $x = \infty$ hely a $\psi(x)$ függvénynek elsőrendű pólusa (egyszeres végtelenhelye), míg a K tartományban más pólusa nincs.

Ha z_0 a $\mathfrak{K}$ képnek ν-szörös pontja, akkor a függvénytan egy tétele szerint z_0 egy bizonyos környezetének minden egyes pontja $\mathfrak{K}$-nak legalább ν-szörös pontja. Élesebben: megadható z_0-nak oly $\varkappa(z_0)$ s a (20) egyenlet minden egyes K-beli x_0 gyökének oly $\varkappa'(x_0)$ környezete, hogy valahányszor z_0' a z_0 hely $\varkappa(z_0)$ környezetének helye, a

$$\psi(x) = z_0' \tag{21}$$

egyenletnek az x_0 hely $\varkappa'(x_0)$ környezetében, többszörösség szerint számlálva, pontosan annyi gyöke van, ahányszoros gyöke x_0 a (20) egyenletnek.

Ha ν véges és z_0 a $\mathfrak{K}$ képnek oly ν-szörös pontja, amelynek bármely környezetében vannak $\mathfrak{K}$-nak legalább $\nu+1$-szeres pontjai is, akkor z_0-t a $\mathfrak{K}$ kép határpontjának lehet nevezni. Világos, hogy $\mathfrak{K}$ határpontjai zárt halmazt alkotnak; továbbá az is, hogy ha valamely Γ JORDAN-féle görbeív végpontjai $\mathfrak{K}$-nak különböző többszörösségű pontjai (egyik végpontja akár a $z=\infty$ hely is lehet), akkor a Γ íven, végpontjait is beleszámítva, $\mathfrak{K}$-nak legalább egy határpontja van.

A határpontok lényeges tulajdonságát fejezi ki a következő segédtétel:

II. segédtétel. Vegyük körül a C görbét egy C' JORDAN-*féle görbével úgy, hogy C a C' nyilt belsejében legyen. Ha z_0 a $\mathfrak{K}$ képnek határponja, akkor z_0 bármely környezetében van oly z_0' hely, hogy a (21) egyenletnek legalább egy gyöke a C és C' görbék határolta nyilt gyűrűtartományban van.*

Bebizonyítás: A határpont értelmezése szerint a z_0 hely $\varkappa(z_0)$ környezetéből kiragadható oly, z_0-hoz közeledő

$$z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots$$

sorozat, hogy a

$$\psi(x) = z_k \tag{22}$$

egyenletnek a K tartományban, többszörösség szerint számlálva, legalább $\nu+1$ számú gyöke legyen ($k=1, 2, 3, \ldots$). Ezért a (22) egyenletnek a K tartományban legalább egy oly x_k gyöke van, amely a (20) egyenlet bármely K-beli x_0 gyökének $\varkappa'(x_0)$ környezetén kívül esik. Az

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$$

sorozatnak emiatt egy ily x_0 hely sem sűrűsödési helye, ami az $\alpha')$ tulajdonsággal csak úgy fér meg, ha minden sűrűsödési helyük a C görbén van; ezért, ha k elég nagy, x_k a C és C' görbék határolta nyilt gyűrűtartomány helye.

A tétel természetesen a $z_0=\infty$ helyre nézve is igaz s belőle, a $\gamma')$ tulajdonság alapján, következik, hogy ez a hely $\mathfrak{K}$-nak nem határpontja. Ezért, ha R elég nagy, a $|z| \geqq R$ zárt körkülső minden helye $\mathfrak{K}$-nak egyszeres pontja.

$\mathfrak{K}$-nak van határpontja, mert ha nem volna, akkor, — minthogy a sík bármely pontja összeköthető valamely JORDAN-féle görbeív, vagy akár egyenesdarab segítségével a $|z| = R$ kör valamely pontjával, — adódnék, hogy a z sík minden helye $\mathfrak{K}$-nak egyszeres pontja, vagyis, hogy a $z = \psi(x)$ függvény a K tartományt kölcsönösen egyértelműen és konformisan leképezi a teljes síkra, ami lehetetlen. Az sem lehetséges, hogy $\mathfrak{K}$-nak csak egy határpontja legyen, mert különben hasonlóan adódnék, hogy a K tartománynak a $z = \psi(x)$ függvény létesitette egyértelmű konformis képe egyrétű pontozott sík volna, ami szintén lehetetlen.

Jelentse z_0 ezentúl a $\mathfrak{K}$ kép egyik oly határpontját, amelyre nézve $|z_0| = r_0$ a legnagyobb; ilyen van, mert $\mathfrak{K}$ határpontjainak halmaza korlátos és zárt halmaz. A legutóbb tett megjegyzés szerint $r_0 > 0$. A $|z| > r_0$ körkülső minden egyes helye $\mathfrak{K}$-nak egyszeres pontja, mert ellenkező esetben e körkülsőn volna $\mathfrak{K}$-nak határpontja.

5. A megelőző szakaszban nem használtam ki a $\psi(x)$ függvény δ') tulajdonságát. Most e tulajdonság alapján kimutatom, hogy $\mathfrak{K}$-nak a $|z| \leqq r_0$ körlapon egy pontja sincs.

Ha $\mathfrak{K}$-nak a $|z| = r_0$ körön volna pontja, akkor e pont valamely környezetének minden egyes helye $\mathfrak{K}$-nak (legalább egyszeres) pontja volna s így a $\mathfrak{K}$ képnek a nyilt $|z| < r_0$ körlapon is volna pontja. Ezért elegendő bebizonyítanom, hogy az a feltevés, hogy a K tartomány valamely a helyén

$$|\psi(a)| < r_0,$$

ellentmondást rejt magában.

Valóban, ebből s a δ') tulajdonságból következnék, hogy a C görbe körülvehető egy C' JORDAN-féle görbével (oly értelemben, hogy C a C' nyilt belsejében van) úgy, hogy a C és C' görbék határolta nyilt gyűrűtartomány minden egyes x helyén

$$|\psi(x)| \leqq r_0 - \eta$$

legyen, ahol $\eta > 0$: elég ehhez η-t oly kicsire s λ-t az egységhez oly közel választanom, hogy

$$\lambda \,|\, \psi(a) \,|\, + \eta \leqq r_0$$

legyen. E szerint a z_0 határpont

$$|\, z - z_0 \,| < \eta$$

környezetének nem volna oly z_0' helye, hogy a (21) egyenletnek a C és C' görbék határolta nyilt gyűrűtartományban legyen gyöke; ez pedig ellentmond a II. segédtételnek.

Már most a megelőző szakasz eredményét is figyelembe véve, adódik, hogy $\mathfrak{K}$ (a $|\, z \,| > r_0$) egyrétű nyilt körkülső s ebből, hogy $\psi(x) = \varphi(x)$ (és $r_0 = r$); így az 1. szakasz elején kimondott feltétel valóban szükséges ahhoz, hogy a (11) helyek jól interpoláló helyek legyenek.

6. Fordítva, ha ez a feltétel teljesül, akkor, Vitali idézett tétele[14] szerint (8) a K tartomány minden korlátos zárt részében egyenletesen érvényes. Legyen $f(x)$ valamely, a $\overline{B}$ tartományban reguláris függvény. Válasszuk ehhez az r' és r'' számokat úgy, hogy

$$r < r' < r''$$

álljon és $f(x)$ a

$$|\, \varphi(x) \,| = r''$$

körképnek, C''-nek, zárt belsejében reguláris legyen. Akkor az ismeretes Cauchy—Hermite-féle interpoláló képlet szerint a

$$|\, \varphi(x) \,| = r'$$

körképnek, C'-nek minden egyes x helyén

$$\begin{aligned} f(x) - L_k(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C''} \frac{f(\xi)}{\xi - x} \, \frac{\omega_k(x)}{\omega_k(\xi)} \, d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C''} \frac{f(\xi)}{\xi - x} \left\{ \frac{\psi_k(x)}{\psi_k(\xi)} \right\}^{n_k} d\xi. \end{aligned} \tag{23}$$

A szakasz elején tett megjegyzés szerint x-ben a C' görbén és ξ-ben a C'' görbén egyenletesen

$$\lim_{k=\infty} \frac{\psi_k(x)}{\psi_k(\xi)} = \frac{\varphi(x)}{\varphi(\xi)},$$

tehát egyenletesen

$$\lim_{k=\infty} \left| \frac{\psi_k(x)}{\psi_k(\xi)} \right| = \frac{|\varphi(x)|}{|\varphi(\xi)|} = \frac{r'}{r''};$$

ezért, ha λ-t úgy választjuk, hogy

$$\frac{r'}{r''} < \lambda < 1$$

legyen, akkor, ha k elég nagy,

$$\left| \frac{\psi_k(x)}{\psi_k(\xi)} \right| \leqq \lambda. \tag{24}$$

Legyen már most s a C'' görbe hossza, M az $|f(\xi)|$ maximuma a C'' görbén, d pedig a C' és C'' görbék legrövidebb távolsága. Akkor a C' görbén (23) és (24) miatt

$$|f(x) - L_k(x)| \leqq \frac{1}{2\pi} \frac{sM}{d} \lambda^{nk},$$

tehát (9) miatt a C' görbén egyenletesen

$$\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x). \tag{5}$$

Ebből pedig következik, hogy (5) a $\overline{B}$ tartományban egyenletesen szintén érvényes, úgy, hogy az 1. szakasz elején kimondott feltétel elegendő is ahhoz, hogy a (11) helyek jól interpoláló helyek legyenek. Eszerint érvényes a következő tétel:

III. *Ahhoz, hogy a* Jordan-*féle C görbe $\overline{B}$ zárt belsejében választott* (11) *helyek jól interpoláló helyek legyenek, vagyis, hogy valahányszor $f(x)$ a $\overline{B}$ tartományban reguláris függvény s $L_k(x)$ az $f(x)$ függvényt az $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{nk}^{(k)}$ helyeken interpoláló* Lagrange—Hermite-*féle polinom* ($k = 1, 2, 3, \ldots$), *a $\overline{B}$ tartományban egyenletesen*

$$\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x)$$

legyen, szükséges és elegendő, hogy a C görbe K nyilt külsejének minden egyes x helyén

$$\lim_{k=\infty} \psi_k(x) = \varphi(x)$$

legyen.

A bebizonyitás mutatja, hogy, ha e feltétel teljesül s C^* oly JORDAN-féle görbe, mely C-t körülveszi, akkor (5) minden, C^* zárt belsejében reguláris és egyenletesen korlátos függvénycsaládra nézve a $\overline{B}$ tartományban *egyenlő mértékben* egyenletesen érvényes, azaz ha $\varepsilon > 0$, választható k_0 úgy, hogy $k \geqq k_0$ esetén $\overline{B}$ minden x helyén, a függvénycsalád bármely $f(x)$ tagjára s a hozzá tartozó $L_k(x)$ interpoláló polinomra nézve

$$|f(x) - L_k(x)| \leqq \varepsilon$$

legyen.

7. Ha (8) nem teljesül a K tartomány minden helyén, akkor a III. tétel szerint az (5) egyenlőségnek a $\overline{B}$ tartományban egyenletes teljesüléséhez nem elegendő, hogy $f(x)$ a $\overline{B}$ tartományban reguláris legyen. Azonban a III. tétel bebizonyitásának módja abban az általánosabb esetben is alkalmazható, amikor a (16) határérték K minden egyes helyén létezik, de nem szükségképpen $\varphi(x)$. Mégpedig módot ad oly T tartomány meghatározására, hogy $f(x)$-nek a T tartományban reguláris viselkedése elegendő legyen ahhoz, hogy (5) a $\overline{B}$ tartományban egyenletesen teljesüljön és emellett a T tartomány bizonyos értelemben a *legszűkebb* ily tulajdonságú tartomány legyen. Szabatosabban kifejezve, érvényes a következő tétel:

IV. *Legyenek a* (11) *helyek a* JORDAN-*féle C görbe $\overline{B}$ zárt belsejében úgy választva, hogy*

$$\lim_{k=\infty} \psi_k(x) = \psi(x) \qquad (16)$$

a C görbe K nyilt külsejének minden egyes x helyén létezzék. A $z = \psi(x)$ függvény a K tartományról a z síkon valamely $\mathfrak{K}$ képet létesít; jelentse r_0 a $\mathfrak{K}$ kép határpontjai abszolut értékének felső határát. r_0 pozitív, véges; a $|z| > r_0$ körkülső minden egyes pontja $\mathfrak{K}$-nak egyszeres pontja, úgy, hogy ez a körkülső a K tartomány valamely K' részének a $z = \psi(x)$ függvény létesítette kölcsönösen egyértelmű és konformis képe. Jelentse T az x sík ama pontjainak halmazát, amelyek K'-nek nem pontjai.

Valahányszor $f(x)$ a T tartományban reguláris függvény és $L_k(x)$ az $f(x)$ függvényt az $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}$ helyeken interpoláló LAGRANGE—HERMITE-*féle polinom* ($k = 1, 2, 3, \ldots$), *a* $\overline{B}$ *tartományban* (sőt, a T tartományban is) *egyenletesen*

$$\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x). \tag{5}$$

Azonban, ha a valamely belső helye a T tartománynak, akkor van oly $f(x)$ függvény, amely a T tartományban (söt, az egész síkon is) *az $x=a$ hely kivételével mindenütt reguláris s amelyre nézve* (5) *nem érvényes a* $\overline{B}$ *tartományban egyenletesen.*

Bebizonyítás: A (13) sorozat *α), β), γ)* és *ε)* tulajdonságai teljesülnek; $\mathfrak{K}$ említett s a T tartomány értelmezéséhez is felhasznált tulajdonságai a 4. szakasz tárgyalásaiból folynak. Ha $f(x)$ a T tartományban reguláris függvény, akkor a 6. szakaszban adott bebizonyítás, ahol azonban $\varphi(x)$ helyébe mindenütt $\psi(x)$, (8) helyébe mindenütt (16) kerül, alkalmazható és adja, hogy (5) a T tartományban egyenletesen érvényes.

Másrészt, ha a a T tartomány belső helye, akkor az $f(x) = \dfrac{1}{a-x}$ függvényre nézve, mely, az $x = a$ hely kivételével, az egész síkon reguláris, (5) nem lehet $\overline{B}$-ban egyenletesen érvényes. Ha a a $\overline{B}$ tartomány helye, akkor ez a triviális; különben pedig, ha az állítás nem volna igaz, akkor úgy, mint az 1. szakaszban, következnék, hogy (14) bizonyos k-tól kezdve érvényes a C görbén s ebből, úgy, mint a 3. szakaszban, az következnék, hogy ha $\lambda > 1$, akkor van oly, C-t körülvevő JORDAN-féle C' görbe, hogy (18) a C és C' görbék határolta nyilt gyűrűtartományban érvényes, ami

$$|\psi(a)| < r_0$$

miatt, mint az 5. szakaszban, ellentmond a II. segédtételnek.

II. A jól interpoláló helyek eloszlása.

8. Ebben a fejezetben csak annak az esetnek tárgyalására szorítkozom, amikor a (11) interpolálóhelyek a JORDAN-féle C görbén vannak és bebizonyítom, hogy ahhoz, hogy jól interpoláló helyek legyenek, szükséges és elegendő, hogy a

$$\begin{array}{l} z_1^{(1)}, z_2^{(1)}, \ldots, z_{n_1}^{(1)}, \\ z_1^{(2)}, z_2^{(2)}, \ldots, z_{n_2}^{(2)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_{n_k}^{(k)}, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \tag{25}$$

képhelyek a $|z| = r$ körön egyenletesen oszoljanak el. E célból a (8) feltételt olyanszerű határértékfeltétellé fogom átalakítani, mint amilyenekkel WEYL foglalkozik az egyenletesen eloszló számsorozatokról írt munkájában.[15]

Mindenekelőtt bebizonyítom, hogy a III. tétel a következő alakban mondható ki: *ahhoz, hogy a* (11) *helyek jól interpoláló helyek legyenek, szükséges és elegendő, hogy a K tartomány minden x helyén*

$$\lim_{k=\infty} \frac{\psi'_k(x)}{\psi_k(x)} = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \tag{26}$$

legyen.

Ugyanis, ha a (8) feltétel K minden helyén teljesül, akkor VITALI tétele szerint K minden korlátos, zárt részében egyenletesen teljesül; ebből, minthogy sem $\psi_k(x)$, sem $\varphi(x)$ nem tűnik el K egy helyén sem, (26) következik. A fordított dolognak bebizonyításánál, t. i. hogy a (26) feltétellel együtt a (8) is teljesül K minden helyén, az I. segédtétel szerint elegendő arra az esetre szorítkoznom, amikor a

$$\lim_{k=\infty} \psi_k(x) = \psi(x) \tag{16}$$

határérték K minden helyén létezik. Ekkor, mint a 3. pontban láttuk, $\psi(x)$ a K tartományban reguláris, egyértékű, a (17)

[15] Idézett hely, 314. oldal.

feltételt teljesitő függvény; VITALI tétele szerint (16) a K tartomány minden korlátos, zárt részében egyenletesen teljesül. Ha K' jelöli K valamely korlátos, zárt részét és d a K' tartománynak a C görbétől való legrövidebb távolságát, akkor K'-ben

$$\psi_k(x) = \left\{ |x - x_1^{(k)}| \cdot |x - x_2^{(k)}| \cdot \ldots \cdot |x - x_{n_k}^{(k)}| \right\}^{\frac{1}{n_k}} \geqq d,$$

$(k = 1, 2, 3, \ldots)$, úgy, hogy

$$\psi(x) \geqq d,$$

s így $\psi(x)$ a K tartományban sehol sem tűnik el. Ezért (16)-ból

$$\lim_{k=\infty} \frac{\psi'_k(x)}{\psi_k(x)} = \frac{\psi'(x)}{\psi(x)}$$

tehát (26) miatt $\varphi(x)$ és $\psi(x)$, eltekintve egy állandó szorzótól, egyenlők. Ez a szorzó (3) és (17) miatt az egység s így (16) átmegy a (8) feltételbe.

9. A (26) feltételben

$$\frac{\psi'_k(x)}{\psi_k(x)} = \frac{1}{n_k} \sum_{l=1}^{n_k} \frac{1}{x - x_l^{(k)}};$$

ezenkivül, ha ($|z| \geqq r$ esetén) $x = \Phi(z)$ a $z = \varphi(x)$ függvény megforditottját jelöli, a K tartomány minden egyes x helyén

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{x - \Phi(re^{i\vartheta})}.$$

Ugyanis, ha ξ a K tartomány helye,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\xi - \Phi(re^{i\vartheta})} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{dz}{z\{\xi - \Phi(z)\}},$$

ahol az integráció útja a pozitív értelemben befutott $|z| = r$ kör. Az integrálandó függvény a $\zeta = \varphi(\xi)$ pólustól eltekintve, amely a leképezés egyrétűsége miatt elsőrendű s reziduuma

$$\lim_{z=\zeta} \frac{z - \zeta}{z\{\xi - \Phi(z)\}} = -\frac{1}{\zeta} \lim_{x=\xi} \frac{\varphi(x) - \varphi(\xi)}{x - \xi} = -\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)},$$

e kör nyilt külsején reguláris, zárt külsején folytonos;

$$\lim_{z=\infty}\frac{\Phi(z)}{z}=\lim_{x=\infty}\frac{x}{\varphi(x)}=1$$

miatt a $z=\infty$ helyen kétszeresen eltűnik; így, a reziduumtételt a $|z|\geqq r$ körkülsőre alkalmazva, a bebizonyítandó

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{dz}{z\{\xi-\Phi(z)\}}=\frac{\varphi'(\xi)}{\varphi(\xi)}$$

egyenlőség adódik.

Eszerint a (26) feltétel, jelölést változtatva, így írható:

$$\lim_{k=\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{l=1}^{n_k}\frac{1}{\xi-\Phi(z_l^{(k)})}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\vartheta}{\xi-\Phi(re^{i\vartheta})};$$

szóval *ahhoz, hogy a* (11) *helyek jól interpoláló helyek legyenek, szükséges és elegendő, hogy, ha* ξ *a* K *tartomány bármely helye, a*

$$G(z)=\frac{1}{\xi-\Phi(z)}$$

függvény eleget tegyen a

$$\lim_{k=\infty}\frac{1}{n_k}\sum_{l=1}^{n_k}G(z_l^{(k)})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}G(re^{i\vartheta})\,d\vartheta \tag{27}$$

határértékfeltételnek.

10. Ha a (27) feltételt valamely $G(z)$ függvény kielégíti (mindig úgy értve, hogy $G(z)$ a $|z|=r$ körön értelmezve van, $G(re^{i\vartheta})$ a $0\leqq\vartheta<2\pi$ számközön Riemann szerint integrálható s ezeken kívül (27) teljesül), akkor nyilván $\Re G(z)$ is, továbbá, ha c állandó, $cG(z)$ is kielégíti azt. Ha $G_1(z)$ és $G_2(z)$ oly függvények, amelyek eleget tesznek a (27) feltételnek, akkor $G_1(z)+G_2(z)$ is eleget tesz neki.

Ha a (27) feltételt a $|z|=r$ körön egyenletesen összetartó

$$G_1(z),\ G_2(z),\ldots,\ G_\nu(z),\ldots$$

függvénysorozat minden egyes tagja kielégíti, akkor határfüggvényük, $G(z)$ is. Ugyanis k-ban egyenletesen ($k=1, 2, 3,\ldots$)

$$\lim_{\nu=\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{l=1}^{n_k} G_\nu(z_l^{(k)}) = \frac{1}{n_k} \sum_{l=1}^{n_k} G(z_l^{(k)}),$$

úgy, hogy a feltételezett

$$\lim_{k=\infty} \frac{1}{n_k} \sum_{l=1}^{n_k} G_\nu(z_l^{(k)}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_\nu(re^{i\vartheta})\, d\vartheta$$

egyenlőségből $\nu \to \infty$ határátmenettel (minthogy az a $k \to \infty$ határátmenettel és az integrálással felcserélhető,) (27) adódik.

A Cauchy-féle integrálképlet jól ismert következménye, hogy minden, a $\overline{B}$ tartományban reguláris $g(x)$ függvény a C görbén egyenletesen megközelíthető

$$g_\nu(x) = \sum_{l=1}^{\nu} c_l^{(\nu)} \frac{1}{\xi_l^{(\nu)} - x}$$

alakú függvényekkel, ahol a $c_l^{(\nu)}$ együtthatók állandók s a $\xi_l^{(\nu)}$ helyek a K tartomány helyei ($\nu = 1, 2, 3, \ldots$; $l = 1, 2, \ldots, \nu$). A $|z| = r$ körön egyenletesen

$$g(\Phi(z)) = \lim_{\nu=\infty} g_\nu(\Phi(z)),$$

ezért a fentiek szerint, valahányszor a (11) helyek jól interpoláló helyek és $g(x)$ a $\overline{B}$ tartományban x reguláris *analitikai* függvénye, a

$$G(z) = g(\Phi(z))$$

függvény kielégíti a (27) feltételt.

Ebből viszont következik, hogy $G(z) = g(\Phi(z))$ akkor is eleget tesz a (27) feltételnek, ha $g(x)$ a $\overline{B}$ tartományban x valós és képzetes összetevőjének reguláris *harmonikus* függvénye, feltéve, hogy a (11) helyek jól interpoláló helyek.

11. Bebizonyítom, hogy a $G(z) = g(\Phi(z))$ függvény, feltéve, hogy a (11) helyek jól interpoláló helyek, akkor is kielégíti a (27) feltételt, ha $g(x)$ az x valós és képzetes összetevőjének a zárt $\overline{B}$ tartományban folytonos, a nyilt B tartományban reguláris harmonikus függvénye. E célból elegendő bebizonyítanom, hogy az ily $g(x)$ függvény a $\overline{B}$ tartományban (tehát a C görbén is) egyenletesen megközelíthető a $\overline{B}$ tartományban reguláris harmonikus függvényekkel.

Ennek bebizonyítására felhasználhatnám WALSH egy tételét,[16] amely többek között az analog állítást tartalmazza harmonikus függvények helyett analitikai függvényekre; azonban egyszerűbb lesz WALSH bebizonyításának következő részleteredményére hivatkoznom:

Bármely JORDAN*-féle C görbéhez találhatók oly, a $\overline{B}$ tartományban reguláris*

$$\chi_1(x), \chi_2(x), \ldots, \chi_\nu(x), \ldots$$

függvények, amelyek a $\overline{B}$ tartományt B egy-egy részére képezik le, hogy valahányszor $g(x)$ a $\overline{B}$ tartományban folytonos függvény, mindannyiszor $\overline{B}$-ban egyenletesen

$$\lim_{\nu=\infty} g(\chi_\nu(x)) = g(x).^{17} \tag{28}$$

Ha itt $g(x)$ ezenkívül még a B tartományban x valós és képzetes összetevőjének reguláris harmonikus függvénye, akkor $g(\chi_\nu(x))$ a $\chi_\nu(x)$ függvény felsorolt tulajdonságai miatt x valós és képzetes összetevőjének a zárt $\overline{B}$ tartományban reguláris harmonikus függvénye $(\nu=1, 2, 3, \ldots)$, úgy, hogy állításom be van bizonyítva.

Ha most $G(z)$ bármely, a $|z|=r$ körön folytonos valós függvény, akkor

$$g(x) = G(\varphi(x))$$

---

[16] J. L. WALSH: *Über die Entwicklung einer analytischen Funktion nach Polynomen,* Mathematische Annalen 96. (1926); 430—436. oldal. FEJÉR professzor úrnak köszönöm, hogy figyelmemet szíves volt felhívni erre a cikkre; enélkül az V. tételt a JORDAN-féle görbéknek csak egy speciális osztályára tudtam bebizonyítani.

[17] Idézett hely, 431—432. oldal. WALSH jelöléseivel

$$\chi_\nu(x) = \psi(\varphi_\nu(x)),$$

ahol $\varphi_\nu(x)$ alkalmasan választott, C-t körülvevő C_ν JORDAN-féle görbe belsejét az egységkör belsejére, $\psi(x)$ pedig az egységkör belsejét C belsejére képezi le kölcsönösen egyértelműen és konformisan, úgy, hogy $\chi_\nu(x)$ a C_ν görbe belsejét a C görbe belsejére képezi le így, amiből kimondott tulajdonságai következnek. A $g(x)$ függvényre tett feltételek közül WALSH a (28) egyenlőség bebizonyítására csak azt használja fel, hogy a $\overline{B}$ tartományban folytonos. (Nála $g(x)$ helyett $f(z)$-vel van a függvény jelölve.)

a C görbén folytonos és valós. Ezért CARATHÉODORY vizsgálatai szerint[18] $g(x)$ értelmezhető a B tartományban úgy, hogy ott x valós és képzetes összetevőjének reguláris harmonikus, a $\bar{B}$ tartományban folytonos függvénye legyen, úgy, hogy

$$G(z) = g(\Phi(z))$$

kielégíti a (27) feltételt. Így — mindig feltéve, hogy a (11) helyek jól interpoláló, a C görbe kerületén levő helyek — a (27) egyenlőség bármely, a $|z| = r$ körön folytonos és valós $G(z)$ függvényre nézve teljesül s így általában bármely, ott folytonos függvényre nézve is érvényes.

12. Ezek után — teljesen WEYL egyik bebizonyításának[19] mintájára — kimutathatom a 8. szakasz elején kimondott feltétel szükségességét. E célból azt a következő alakra hozom:

Ahhoz, hogy a JORDAN*-féle C görbén levő* (11) *helyek jól interpoláló helyek legyenek, szükséges és elegendő, hogy, ha*

$$\alpha \leqq \vartheta < \beta, \quad z = re^{i\vartheta}$$

a $|z| = r$ kör valamely γ íve s

$$G(z) = G(z;\ \alpha, \beta)$$

ezen az íven 1, *a $|z| = r$ kör többi pontjaiban pedig* 0, *akkor $G(z)$ eleget tesz a* (27) *feltételnek.*

Hogy ez a feltétel nem más, mint a 8. szakasz elején kimondott feltétel, az következőkép látható be. Erre a $G(z)$ függvényre nézve $G(z_l^{(k)}) = 1$, vagy 0 aszerint, hogy $z_l^{(k)}$ a γ íven van-e, vagy sem. Tehát, ha ν_k jelöli a $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_{n_k}^{(k)}$ helyek közül a γ íven levők számát, $k = 1, 2, 3, \ldots$ esetén

$$\frac{1}{n_k} \sum_{l=1}^{n_k} G(z_l^{(k)}) = \frac{\nu_k}{n_k};$$

továbbá, ha $\sigma = (\beta - \alpha) r$ a γ ív hosszúsága, úgy

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G(re^{i\vartheta})\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta d\vartheta = \frac{\beta - \alpha}{2\pi} = \frac{\sigma}{2\pi r}.$$

---

[18] Idézett hely, 320. oldal.
[19] Idézett hely, 315. oldal.

Ezért a (27) feltétel erre a $G(z)$ függvényre nézve valóban nem más, mint a

$$\lim_{k=\infty} \frac{\nu_k}{n_k} = \frac{\sigma}{2\pi r} \tag{12}$$

egyenletes eloszlási feltétel más alakja.

Ez a $G(z)$ függvény nem folytonos a $|z| = r$ körön s így nem is lehet folytonos függvényekkel egyenletesen megközelíteni. Ezért a feltétel szükségességének bebizonyítására a következő, lényegében WEYLtől származó segédtételre [20] van szükségem:

III. segédtétel. Legyen $G(z)$ valamely, a $|z| = r$ körön értelmezett valós, RIEMANN *szerint integrálható* [21] *függvény. Ha minden pozitív ε számhoz található oly, a $|z| = r$ körön valós és a (27) feltételt kielégítő $\underline{G}(z)$ és $\overline{G}(z)$ függvény, hogy a $|z| = r$ kör minden z pontjában*

$$\underline{G}(z) \leqq G(z) \leqq \overline{G}(z) \tag{29}$$

s továbbá

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{\overline{G}(re^{i\vartheta}) - \underline{G}(re^{i\vartheta})\}\, d\vartheta \leqq \varepsilon,$$

akkor $G(z)$ is kielégíti a (27) feltételt.

Bebizonyítás: Legyen ε tetszésszerinti pozitív szám; $\underline{G}(z)$ és $\overline{G}(z)$ legyenek olyan, a (27) feltételnek eleget tevő függvények, amelyek a (29) és az

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \{\overline{G}(re^{i\vartheta}) - \underline{G}(re^{i\vartheta})\}\, d\vartheta \leqq \frac{\varepsilon}{2} \tag{30}$$

egyenlőtlenségnek is megfelelnek. Ha k elég nagy, akkor

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underline{G}(re^{i\vartheta})\, d\vartheta \leqq \frac{1}{n_k}\sum_{l=1}^{n_k} \underline{G}(z_l^{(k)}) + \frac{\varepsilon}{2}$$

és

[20] Idézett hely, 314. oldal.

[21] Ezt úgy értem, hogy $G(re^{i\vartheta})$ a ϑ-nak a $0 \leqq \vartheta < 2\pi$ számközön RIEMANN szerint integrálható függvénye legyen. Ez a feltétel ugyan könnyen következik a többiből, de nincs szükségem arra, hogy elhagyjam.

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{G}(re^{i\vartheta})\,d\vartheta \geqq \frac{1}{n_k}\sum_{l=1}^{n_k} \overline{G}(z_l^{(k)}) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tehát (29) és (30) miatt

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(re^{i\vartheta})\,d\vartheta \leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{G}(re^{i\vartheta})\,d\vartheta \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underline{G}(re^{i\vartheta})\,d\vartheta + \frac{\varepsilon}{2} \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n_k}\sum_{l=1}^{n_k} \underline{G}(z_l^{(k)}) + \varepsilon \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{n_k}\sum_{l=1}^{n_k} G(z_l^{(k)}) + \varepsilon$$

és hasonlóan

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} G(re^{i\vartheta}) \geqq \frac{1}{n_k}\sum_{l=1}^{n_k} G(z_l^{(k)}) - \varepsilon.$$

Vagyis a (27) feltétel valóban teljesül.

A $G(z) = G(z;\, \alpha, \beta)$ függvényhez pl. a következőképpen lehet a III. segédtételben megkivánt egyenlőtlenségeket kielégitő, a $|z| = r$ körön valós, folytonos (tehát az előző szakasz eredménye szerint, ha a (11) helyek jól interpoláló helyek, a (27) feltételnek is megfelelő) $\underline{G}(z)$ és $\overline{G}(z)$ függvényeket értelmezni: Legyen

$$\begin{aligned}\underline{G}(re^{i\vartheta}) &= \frac{2}{\varepsilon}(\vartheta-\alpha), &&\text{ha } \alpha \leqq \vartheta \leqq \alpha + \frac{\varepsilon}{2},\\ &= 1, &&\text{ha } \alpha + \frac{\varepsilon}{2} \leqq \vartheta \leqq \beta - \frac{\varepsilon}{2},\\ &= \frac{2}{\varepsilon}(\beta-\vartheta), &&\text{ha } \beta - \frac{\varepsilon}{2} \leqq \vartheta \leqq \beta,\end{aligned}$$

különben legyen $\underline{G}(re^{i\vartheta}) = 0$; továbbá

$$\begin{aligned}\overline{G}(re^{i\vartheta}) &= \frac{2}{\varepsilon}(\vartheta-\alpha)+1, &&\text{ha } \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \leqq \vartheta \leqq \alpha,\\ &= 1, &&\text{ha } \alpha \leqq \vartheta \leqq \beta,\\ &= \frac{2}{\varepsilon}(\beta-\vartheta)+1, &&\text{ha } \beta \leqq \vartheta \leqq \beta + \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

különben pedig $\overline{G}(re^{i\vartheta})=0$.[22] Világos, hogy $\underline{G}(z)$ és $\overline{G}(z)$ a $|z|=r$ körön folytonosak, hogy (29) teljesül, továbbá éppen

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\overline{G}(re^{i\vartheta})-\underline{G}(re^{i\vartheta})\}\,d\vartheta=\varepsilon.$$

Igy, ha a (11) helyek jól interpoláló helyek, akkor, a III. segédtétel szerint, $G(z)=G(z;\,\alpha,\,\beta)$ kielégiti a (27) feltételt s így a szakasz elején kimondott feltétel valóban szükséges.

13. Annak bebizonyítására, hogy ez a feltétel elegendő is, elég kimutatnom, hogy teljesülése esetén (27) minden, a $|z|=r$ körön értelmezett és RIEMANN szerint integrálható $G(z)$ függvényre nézve fennáll. Ugyanis ekkor (27) teljesül a

$$G(z)=\frac{1}{\xi-\Phi(z)}$$

függvényre nézve is, valahányszor ξ a K tartomány helye, ami, a 9. szakasz eredménye szerint, elegendő ahhoz, hogy a (11) helyek jól interpoláló helyek legyenek.

Ha a megelőző szakasz elején kimondott feltétel teljesül, akkor alkalmazható WEYL következő meggondolása:[20] A (27) feltételt, a 10. szakasz elején tett megjegyzés szerint, minden oly $G(z)$ függvény kielégíti, amely véges számú $G(z)=G(z;\,\alpha,\,\beta)$ alakú függvényből homogén lineáris módon előállítható, más szóval: minden, a $|z|=r$ körön ívről-ívre állandó függvény. Ha most $G(z)$ a $|z|=r$ körön *valós* és RIEMANN szerint integrálható függvény, akkor, hacsak $\varepsilon>0$, a $|z|=r$ kör felosztható úgy ívekre, hogy, $\underline{G}(z)$-vel, illetőleg $\overline{G}(z)$-vel minden egyes részíven állandóan $G(z)$-nek a kérdéses részívhez tartozó WEIERSTRASS-féle alsó, illetőleg felső határát jelölve,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{\overline{G}(re^{i\vartheta})-\underline{G}(re^{i\vartheta})\}\,d\vartheta\leq\varepsilon:$$

---

[22] Az előírásnak csak akkor van értelme, ha $\varepsilon\leq\beta-\alpha$ és $\varepsilon\leq 2\pi+\alpha-\beta$, ami az elfajuló $\beta=\alpha$ és $\beta=\alpha+2\pi$ esetek kivételével (amikor egyébként $G(z;\,\alpha,\,\beta)$ maga is folytonos), nem lényeges megszorítás.

ez éppen a $G(re^{i\vartheta})$ függvénynek a $0 \leqq \vartheta < 2\pi$ számközön RIEMANN-szerinti integrálhatóságához szükséges és elegendő feltétel. Igy a III. segédtétel szerint $G(z)$ eleget tesz a (27) feltételnek; ebből pedig következik, hogy bármely, a $|z| = r$ körön értelmezett és RIEMANN szerint integrálható *komplex* függvény is eleget tesz neki. Igy a megelőző szakasz elején kimondott s már szükségesnek bizonyult feltétel elegendő is, tehát a 8. szakasz elején kimondott feltétel szintén. Eszerint érvényes a következő tétel:

V. *Ahhoz, hogy a* JORDAN-*féle C görbén választott* (11) *helyek jól interpoláló helyek legyenek, vagyis, hogy, valahányszor $f(x)$ a C görbe $\overline{B}$ zárt belsejében reguláris függvény s $L_k(x)$ az $f(x)$ függvényt az $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_{n_k}^{(k)}$ helyeken interpoláló* LAGRANGE-HERMITE-*féle polinom* ($k = 1, 2, 3, \ldots$), *a $\overline{B}$ tartományban egyenletesen*

$$\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x)$$

legyen, szükséges és elegendő, hogy a (25) *képhelyek egyenletesen oszoljanak el a $|z| = r$ körön, azaz, ha γ e kör bármely, σ hosszúságú íve, ν_k pedig a $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_{n_k}^{(k)}$ képhelyek közül a γ íven levők száma, akkor*

$$\lim_{k=\infty} \frac{\nu_k}{n_k} = \frac{\sigma}{2\pi r}$$

legyen.

14. A tétel szószerint nem alkalmazható abban a — feltétlenül érdekes — esetben, amikor a C görbe helyébe valamely, pl. a $-1 \leqq x \leqq +1$ számköz kerül s a jól interpoláló tulajdonságot természetesen úgy értjük, hogy bármely, a számközön reguláris $f(x)$ függvényre nézve a számközön egyenletesen

$$\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x)$$

legyen. Azonban a bebizonyítás könnyen átvihető erre az esetre is; a $\varphi(x)$ leképezőfüggvényen az

$$\tfrac{1}{2}\{x + \sqrt{x^2 - 1}\}$$

függvénynek a $-1 \leqq x \leqq +1$ számköz mentén felvágott síkon egyértékű ágai közül az értendő, amelyik pl. az $x = \frac{5}{4}$ helyen a $\varphi(\frac{5}{4}) = 1$ értéket veszi fel: ez a felvágott síkot a $z = \varphi(x)$ sík

$$|z| > \tfrac{1}{2}$$

körkülsejére képezi le. Magán a számközön $\varphi(x)$ kétértékű, ezért minden $x_l^{(k)}$ interpolálóhelynek két képhely felel meg: $z_l'^{(k)}$ és $z_l''^{(k)}$.[23] Ha ν_k jelenti a

$$z_1'^{(k)}, z_2'^{(k)}, \ldots, z_{nk}'^{(k)}; \; z_1''^{(k)}, z_2''^{(k)}, \ldots, z_{nk}''^{(k)}$$

helyek közül a $|z| = r$ kör valamely σ hosszúságú γ ívére esők számát, akkor a (12) *egyenletes eloszlási feltétel* helyébe a

$$\lim_{k=\infty} \frac{\nu_k}{2n_k} = \frac{\sigma}{2\pi r}$$

feltétel kerül. E feltétel szükséges és elegendő voltát ugyanúgy lehet bebizonyítani, mint ahogy az V. tételt bizonyítottam be; a 11. szakasz tárgyalásai helyébe WEIERSTRASS approximációtételének alkalmazása kerül.

Kalmár László.

ÜBER INTERPOLATION.

Es sei C eine JORDANsche Kurve in der komplexen x-Ebene; die Interpolationsstellen sollen auf dieser Kurve gewählt werden. $f(x)$ sei eine analytische Funktion, die in dem von C umgrenzten abgeschlossenen Bereiche $\overline{B}$ regulär ist und $L_k(x)$ bezeichne das zu $f(x)$ und zu den Interpolationsstellen $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_k^{(k)}$ gehörige LAGRANGE—HERMITE'sche Interpolationspolynom.

Es entsteht die Frage, kann man die Stellen (2) ein für allemal so wählen, dass immer gleichmässig in $\overline{B}$

$$\lim_{k=\infty} L_k(x) = f(x)$$

sei, wenn nur $f(x)$ ebenda regulär ist? Solche Stellen werde ich *gut interpolierende Stellen* nennen.

---

[23] Ha $x_l^{(k)} = 1$, vagy -1, akkor $z_l'^{(k)} = z_l''^{(k)}$.

Diese Frage, im Falle eines Kreises schon von RUNGE[1] aufgeworfen und auch gelöst, wurde im allgemeinen Falle von Herrn FEJÉR[2] formuliert und im bejahenden Sinne beantwortet.

Es seien (4) *die* Stellen des Einheitskreises in der komplexen z-Ebene, in die bei einer konformen und schlichten Abbildung des Aussengebietes von C auf das Äussere des Einheitskreises — wobei die unendlich fernen Punkte der beiden Ebenen einander entsprechen — die Interpolationsstellen (2) überführt werden. Herr FEJÉR beweist, dass, wenn $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_k^{(k)}$ die Eckpunkte eines regelmässigen k-Ecks bilden, so sind die Stellen (2) gut interpolierend.

Aus einer Bemerkung des Herrn FEJÉR am Ende seiner Abhandlung erhellt, dass dafür auch hinreicht, wenn man die Interpolationsstellen (2) allgemeiner so wählt, dass die «*Bildstellen*» (4) auf dem Einheitskreise *gleichmässig verteilt* ausfallen. Darunter verstehe ich nach Herrn WEYL, dass, wenn γ ein beliebiger Bogen von der Länge σ des Einheitskreises ist und ν_k die Anzahl derjenigen Punkte $z_1^{(k)}, z_2^{(k)}, \ldots, z_k^{(k)}$ bezeichnet, die auf den Bogen γ fallen, so soll

$$\lim_{k=\infty} \frac{\nu_k}{k} = \frac{\sigma}{2\pi}$$

sein.

Ich beweise, dass diese FEJÉR'sche *hinreichende* Bedingung auch *notwendig* ist.[24] Das ist das Hauptresultat vorliegender Arbeit.

Ladislaus Kalmár.

---

[24] Die Frage, welche Bedingungen für die Stellen (2) *notwendig und hinreichend* sind um gut interpolierend zu sein, wurde zuerst von Herrn FABER (zitiert in der Fussnote [9]) behandelt. Vergleiche auch den demnächst in der Mathematischen Zeitschrift erscheinenden Artikel des Herrn FEKETE (auch zitiert in der Fussnote [9]), in welchem die Untersuchungen des Herrn FABER ergänzt werden.

A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS KÖZÉPÉRTÉKTÉTELÉVEL KAPCSOLATOS KÉRDÉSEKRŐL.

Bevezetés.

Legyen $f(x)$ az x valós változó egyértékű valós függvénye. A differenciálszámítás középértéktételének legegyszerűbb esete a következő.

Ha $f(x)$ az $(a, a+h)$ zárt intervallumban differenciálható,[1] akkor

$$f(a+h)-f(a)=hf'(a+\vartheta h) \quad (0<\vartheta<1). \quad (K_1)$$

Az $f(x+h)-f(x)$ függvény az $f(x)$ első differenciája (véges különbsége), melyet $\Delta f(x)$-szel jelölünk:

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x).$$

Képezve a $\Delta f(x)$ első differenciáját, nyerjük $f(x)$ második differenciáját, $\Delta^2 f(x)$-et, s i. t. Általában

$$\Delta^n f(x)=\Delta^{n-1}f(x+h)-\Delta^{n-1}f(x).$$

Az n-edik differenciára nézve a középértéktétel így szól:[2]

Ha $f(x)$ az $(a, a+nh)$ zárt intervallumban n-szer differenciálható,[3] akkor

$$\Delta^n f(a)=h^n f^{(n)}(a+\vartheta nh) \quad (0<\vartheta<1). \quad (K_n)$$

---

[1] E feltevés valamivel több a szükségesnél.

[2] Arra az általánosabb esetre nézve, midőn a differenciák képzésénél rendre a $h_1, h_2, \ldots, h_n$ növekményeket alkalmazzuk, l. FRÉCHET: Sur une généralisation de la formule des accroissements finis et quelques applications, Rennes 1910, p. 3.

[3] Lásd [1].

A (K_1)-nek egy másik általánosítása a véges TAYLOR-féle formula, mely a LAGRANGE-féle maradéktaggal a következő.

Tegyük fel, hogy $f(x)$ az $(a, a+h)$ zárt intervallumban n-szer differenciálható.[4] Akkor

$$f(a+h) = f(a) + \frac{h}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + R_n\,, \quad (T_n)$$

ahol

$$R_n = \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a+\vartheta h) \qquad (0<\vartheta<1).$$

R. ROTHE[5] bebizonyította, hogy (K_n)-ben $\vartheta \to \frac{1}{2}$ midőn $h \to 0$ és (T_n)-ben $\vartheta \to \dfrac{1}{n+1}$ midőn $h \to 0$, feltéve mindkét esetben még azt is, hogy $f^{(n+1)}(x)$ az a hely környezetében létezik, az a helyen folytonos és azon $\neq 0$.

Dolgozatom 1. §.-ában R. ROTHE e tételeit általánosítani fogom. A (K_n) és (T_n) ugyanis csak speciális esetei egy általánosabb középértéktételnek, mely az ú. n. HERMITE-*féle interpolációra*[6] vonatkozik.

HERMITE-féle interpolációval van dolgunk a következő feladat megoldásánál: meghatározandó a $H(x)$ legfeljebb n-edfokú racionális egész függvény a

$$H(a_i),\ H'(a_i), \ldots,\ H^{(m_i-1)}(a_i) \qquad (i=0, 1, \ldots, k)$$

adatokból, ahol

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_k$$

és

$$m_0 + m_1 + \cdots + m_k = n+1.$$

A követelésnek egy és csakis egy $H(x)$ függvény felel meg.

Tegyük fel már most $f(x)$-ről, hogy léteznek az

$$f^{(m_i-1)}(a_i) \qquad (i=0, 1, \ldots, k)$$

---

[4] Lásd [1].

[5] R. ROTHE: Zum Mittelwertsatze der Differentialrechnung, Mathematische Zeitschrift 9 (1921), p. 314 és 309—310.

[6] V. ö. HERMITE: Sur la formule d'interpolation de Lagrange, Journal für die reine und angewandte Mathematik 84 (1878), p. 70.

differenciálhányadosok. ($f^{(0)}(x)$-en maga $f(x)$ értendő). Legyenek az

$$\underbrace{a_0,\ldots,a_0}_{m_0\text{-szor}},\ \underbrace{a_1,\ldots,a_1}_{m_1\text{-szer}},\ldots,\ \underbrace{a_k,\ldots,a_k}_{m_k\text{-szor}}$$

helyek tetszőleges sorrendben

$$u_0,\ u_1,\ldots,\ u_n.$$

Jelentse $[u_0, u_1,\ldots, u_n]$ *az* x^n *együtthatóját abban a legfeljebb* n*-edfokú* $H(x)$ *racionális egész függvényben, melyre*

$$H(a_i)=f(a_i),\ H'(a_i)=f'(a_i),\ldots,\ H^{(m_i-1)}(a_i)=f^{(m_i-1)}(a_i)$$
$$(i=0, 1,\ldots, k).$$

Ez együtthatót, mely az u_0. $u_1\ldots, u_n$ változók függvénye, *interpolációs függvénynek*[7] fogom nevezni.

A jelzett általános középértéktétel igy hangzik:

Ha $f(x)$ az (a_0, a_k) zárt intervallumban n-szer differenciálható,[8] akkor

$$[\underbrace{a_0,\ldots,a_0}_{m_0\text{-szor}},\ \underbrace{a_1,\ldots,a_1}_{m_1\text{-szer}},\ldots,\ \underbrace{a_k,\ldots,a_k}_{m_k\text{-szor}}]=\frac{1}{n!}f^{(n)}(\xi) \qquad (K)$$
$$(a_0<\xi<a_k).$$

Ez Rolle tételének folyománya.[9]

Legyen először

$$k=n,\ m_0=m_1=\cdots=m_k=1,\ a_0=a,\ a_1=a+h,\ldots,$$
$$a_n=a+nh.$$

Akkor (K) átmegy (K_n)-be. U. i. az a legfeljebb n-edfokú $L(x)$ racionális egész függvény, mely az $a, a+h,\ldots, a+nh$ helyeken $f(x)$-szel megegyezik, mint ismeretes a következő:

---

[7] V. ö. Ampère: Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel etc. Annales de mathématiques pures et appliquées, 16 (1826), p. 330.

[8] Lásd [1].

[9] V. ö. Stieltjes: A propos de la formule d'interpolation de Lagrange, Oeuvres 1, p. 54—56.

$$L(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}\,\frac{\Delta f(a)}{h} + \frac{(x-a)(x-a-h)}{2!}\,\frac{\Delta^2 f(a)}{h^2} + \cdots +$$
$$+ \frac{(x-a)(x-a-h)\ldots(x-a-(n-1)h)}{n!}\,\frac{\Delta^n f(a)}{h^n}.$$

Ebből pedig látható, hogy

$$[a, a+h,\ldots, a+nh] = \frac{1}{n!}\,\frac{\Delta^n f(a)}{h^n}.$$

Tehát a szóbanforgó esetben (K) tényleg átmegy (K_n)-be, lévén most $\xi = a + \vartheta n h$ $(0 < \vartheta < 1)$.

Legyen másodszor

$$k = 1,\ a_0 = a,\ a_1 = a + h,\ m_0 = n,\ m_1 = 1.$$

Akkor (K) átmegy a (T_n)-be, mert amint könnyen belátható

$$f(a+h) = f(a) + h\,\frac{f'(a)}{1!} + \cdots + h^{n-1}\,\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} +$$
$$+ h^n\,[\overbrace{a, a,\ldots, a}^{n\text{-szer}}, a+h],$$

és most $\xi = a + \vartheta h$ $(0 < \vartheta < 1$.

Már most R. Rothe fenti tételei csak speciális esetei egy általánosabb tételnek, mely a (K)-ban szereplő ξ középhelyre vonatkozik. Az $a_0, a_1,\ldots, a_k$ helyek «súlypontja», ha e helyeket rendre $m_0, m_1,\ldots, m_k$-val súlyozzuk,

$$\frac{m_0 a_0 + m_1 a_1 + \cdots + m_k a_k}{m_0 + m_1 + \cdots + m_k}.$$

ξ-nek e helytől való távolsága, ha hosszegységnek a két szélső a hely távolságát, $(a_k - a_0)$-t választjuk:

$$t = \frac{1}{a_k - a_0}\left(\xi - \frac{m_0 a_0 + m_1 a_1 + \cdots + m_k a_k}{m_0 + m_1 + \cdots + m_k}\right).$$

Mivel (K_n) esetében $\xi = a + \vartheta n h$, (T_n) esetében pedig $\xi = a + \vartheta h$, azért

$$t=\begin{cases}\vartheta-\dfrac{1}{2} & \text{a } (K_n) \text{ esetén,}\\[2ex] \vartheta-\dfrac{1}{n+1} & \text{a } (T_n) \text{ esetén.}\end{cases}$$

Tehát R. ROTHE tételei szerint e két speciális esetben $t\to 0$, midőn $a_1,\ldots, a_k\to a_0$.

A jelzett általános tétel most már (durván kifejezve) abban áll, hogy $t\to 0$ *mindig* érvényes, midőn $a_0, a_1,\ldots, a_k$ valamely fix a helyhez konvergálnak. Hogy a szabatos tételt egyszerűbben fejezhessem ki, előre bocsátok egy definiciót.

Definició. Legyen adva valamely fix a *hely. Az* $a_0<a_1<\cdots<a_k$ *helyek konvergáljanak* a*-hoz. Jelentse* d *az* $|a-a_0|$ *és* $|a-a_k|$ *közül a nem kisebbiket. Azt mondom, hogy* $a_0, a_1,\ldots, a_k\to a$ *«szűkebb értelemben», ha*

$$\frac{|a_0-a_k|}{d}\geqq\varrho,$$

ahol ϱ *egy állandó pozitív szám (mely persze* $\leqq 2$*).*[10]

Már most az általános tétel, melyet be fogok bizonyítani a (K)-ban szereplő ξ középhelyről, a következő.

I. Tétel. Legyen $f(x)$ *valamely* a *hely környezetében* n*-szer differenciálható. Legyenek* $a_0<a_1<\cdots<a_k$ *e környezetben; akkor érvényes a* (K)*. Azt állítom, hogy ha még* $f^{(n+1)}(a)$ *is létezik és* $\neq 0$, *úgy*

$$\frac{1}{a_k-a_0}\left(\xi-\frac{m_0a_0+m_1a_1+\cdots+m_ka_k}{m_0+m_1+\cdots+m_k}\right)\to 0$$

midőn $a_0, a_1,\ldots, a_k\to a$ *«szűkebb értelemben»; ez utóbbi megszorítás elesik, ha*

$$\lim_{x_1=a,\,x_2=a}\frac{f^{(n)}(x_1)-f^{(n)}(x_2)}{x_1-x_2}=f^{(n+1)}(a).$$

---

[10] Ha $a_0<a_1<\cdots<a_k$ úgy konvergálnak a-hoz, hogy $a_0\leqq a\leqq a_k$, akkor ez nem lehet más, mint «szűkebb értelemben» vett konvergencia. Ezzel a speciális esettel STIELTJES is foglalkozott más vizsgálatokban, melyekről alább szólok.

Különben meg fogom vizsgálni azt az esetet is, midőn

$$f^{(n+1)}(a) = f^{(n+2)}(a) = \cdots = f^{(n+s-1)}(a) = 0, \quad f^{(n+s)}(a) \neq 0.$$

A középértéktétellel kapcsolatban, dolgozatom 2. §.-ában az interpolációs függvény folytonosságával foglalkozom. Előre bocsátom STIELTJES[11] következő tételét (melyet itt célomnak megfelelőleg fogalmazok).

Legyen $f(x)$ valamely a hely környezetében értelmezve. Legyenek $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ e környezetben; akkor $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ is értelmezve van. Ha már most $f^{(n)}(a)$ létezik, úgy

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] \to \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

midőn $a_0, a_1, \ldots, a_n \to a$ azon megszorítással, hogy $a_0 \leqq a \leqq a_n$.[12] Könnyen belátható, hogy

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = [\overbrace{a, a, \ldots, a,}^{n+1\text{-szer}}].$$

Tehát STIELTJES előbbi tétele azt mondja, hogy a szóban forgó esetben az $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ interpolációs függvény határértékét úgy kapjuk, hogy mindegyik argumentum helyébe az ő határértékét helyettesítjük. Már most be fogom bizonyítani, hogy ez akkor is érvényes, ha az argumentumok nem szükségképpen mind ugyanazon határértékhez, hanem *csoportonként* más és más határértékhez konvergálnak. Az általános tétel helyett elegendő lesz annak következő speciális esetét ismertetnem.

---

[11] STIELTJES: Quelques remarques à propos des dérivées d'une fonction d'une seule variable, Oeuvres 1, p. 69—71.

[12] V. ö. EBERHARD HOPF: Über die Zusammenhänge zwischen gewissen höheren Differenzenquotienten reeller Funktionen einer reellen Variablen und deren Differenzierbarkeitseigenschaften, Inaugural-Dissertation, Berlin 1926, p. 15. Satz 2. E tétel kimondja, hogy ha $a_0, a_1, \ldots a_n \to a$ minden megszorítás nélkül, úgy $\lim [a_0, a_1, \ldots a_n]$ akkor és csak akkor létezik, ha $f(x)$ az a hely környezetében $(n-1)$-szer differenciálható s $f^{(n-1)}(x)$ alsó és felső differenciálhányadosa az a helyen folytonos; ez esetben $f^{(n)}(a)$ is létezik és $\lim [a_0, a_1, \ldots, a_n] = f^{(n)}(a)$.

II. Tétel. Legyenek $\alpha < \beta$ adott helyek. Tegyük fel $f(x)$-ről, hogy $f''(\alpha)$ és $f'(\beta)$ léteznek. Legyen $a_0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4$. Akkor

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4] \rightarrow [\alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta]$$

midőn $a_0, a_1, a_2 \rightarrow \alpha$ és $a_3, a_4 \rightarrow \beta$ «szűkebb értelemben»; ez utóbbi megszorítás elesik, ha

$$\lim_{x_1=\alpha,\, x_2=\alpha} \frac{f'(x_1)-f'(x_2)}{x_1-x_2} = f''(\alpha), \quad \lim_{\bar{x}_1=\beta,\, \bar{x}_2=\beta} \frac{f(\bar{x}_1)-f(\bar{x}_2)}{\bar{x}_1-\bar{x}_2} = f'(\beta).$$

A dolgozat egyéb részleteit e bevezetésben nem említem.

1. §. A középértéktételben szereplő középhelyről.

1. A bevezetésben említett I. tételnek először a legspeciálisabb esetét mutatom be, mely a (K_1) középértéktételre vonatkozik.

R. ROTHE[13] bebizonyította, hogy (K_1)*-ben $\vartheta \rightarrow \frac{1}{2}$, midőn $h \rightarrow 0$,*[14] *feltéve, hogy $f''(x)$ az α helyen folytonos és $\neq 0$.* Megmutatom, miszerint *elég annyit feltenni, hogy $f''(\alpha)$ létezik és $\neq 0$.*

A bizonyításban feltehetjük, hogy $\alpha = 0$. Legyen

$$\varphi(x) = xf'(0) + x^2 \frac{f''(0)}{2} \tag{1}$$

és

$$f(x) = \varphi(x) + r(x). \tag{2}$$

(K_1) így írható

$$\varphi(h) + r(h) - r(0) = h\varphi'(\vartheta h) + hr'(\vartheta h). \tag{3}$$

Mivel a középértéktételt $r(x)$-re is alkalmazhatjuk,

$$r(h) - r(0) = hr'(\bar{\vartheta} h) \qquad (0 < \bar{\vartheta} < 1). \tag{4}$$

(1)-ből pedig adódik

$$\varphi'(\vartheta h) = f'(0) + \vartheta h f''(0). \tag{5}$$

---

[13] R. ROTHE[5] p. 307.

[14] Részletesebben: bármely pozitív ε-hoz található egy pozitív δ úgy, hogy a (K_1)-nek megfelelő bármely ϑ-ra $|\vartheta - \frac{1}{2}| < \varepsilon$, valahányszor $|h| < \delta$.

Már most (1), (4) és (5) alapján (3) ezt az alakot ölti

$$f''(0)\left(\tfrac{1}{2}-\vartheta\right)=\frac{r'(\vartheta h)}{h}-\frac{r'(\bar{\vartheta} h)}{h}. \tag{6}$$

De (1) és (2)-ből

$$f'(x)=f'(0)+xf''(0)+r'(x),$$

s így a differenciálhányados értelmezése folytán

$$\lim_{x=0}\frac{r'(x)}{x}=0.$$

Tehát, tekintettel arra, hogy $0<\vartheta<1$ és $0<\bar{\vartheta}<1$, nyilván

$$\lim_{h=0}\frac{r'(\vartheta h)}{h}=0,\quad \lim_{h=0}\frac{r'(\bar{\vartheta} h)}{h}=0.$$

Ennélfogva (6)-ból az $f''(0)\neq 0$ feltevés következtében adódik, hogy

$$\tfrac{1}{2}-\vartheta\rightarrow 0,$$

midőn $h\rightarrow 0$, qu. e. d.

Az $f''(a)$ létezésének feltevése nélkül a tétel általánosságban nem érvényes. Legyen például

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & \text{ha } x\neq 0 \\ 0 & \text{, ha } x=0. \end{cases}$$

E függvényre a $(0, h)$ intervallumban alkalmazható a középértéktétel, mely szerint most

$$f(h)=hf'(\vartheta h) \qquad (0<\vartheta<1).$$

De $f''(0)$ nem létezik. És ez esetben tényleg

$$\lim_{h=0}\vartheta\neq\tfrac{1}{2}.$$

Ez könnyen belátható ama tény alapján, hogy a 0 hely tetszőleges közelségében található olyan hely, ahol $f(x)=0$.

A tétel az $f''(a)\neq 0$ feltevés nélkül szintén érvényét veszti. Ugyanis fennáll a következő általánosabb tétel.

Tegyük fel, hogy

$$f''(a) = f'''(a) = \cdots = f^{(k-1)}(a) = 0, \quad f^{(k)}(a) \neq 0.$$

Akkor (K_1)-ben

$$\lim_{h=0} \vartheta = \frac{1}{\sqrt[k-1]{k}}.$$

A bebizonyítás az előbbihez hasonló. (Most azonban a véges Taylor-féle formulát kell alkalmaznunk.)

2. A (K_1)-ben szereplő ϑ-ra vonatkozó fenti tétel kiterjeszthető a (K_n)-beli ϑ-ra. Mint a bevezetésben említettem (151. old.), R. Rothe[15] bebizonyította, hogy *(K_n)-ben $\vartheta \to \frac{1}{2}$ midőn $h \to 0$, feltéve, hogy $f^{(n+1)}(x)$ az a helyen folytonos és $\neq 0$.* Ismét megmutatom, miszerint *elég annyit feltenni, hogy $f^{(n+1)}(a)$ létezik* és $\neq 0$.

A bizonyításban megint feltehetjük, hogy $a = 0$. Legyen

$$\varphi(x) = x^n \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + x^{n+1} \frac{f^{(n+1)}(0)}{(n+1)!} \tag{7}$$

és

$$f(x) = \varphi(x) + r(x).$$

(K_n) így írható

$$\triangle^n \varphi(0) + \triangle^n r(0) = h^n \varphi^{(n)}(\vartheta n h) + h^n r^{(n)}(\vartheta n h). \tag{8}$$

Ismeretes, hogy

$$\triangle^n x^n = n!\, h^n. \tag{9}$$

Továbbá teljes indukcióval könnyen bebizonyítható, hogy *ha* $n \geqq 2$,

$$\triangle^n x^{n+1} = (n+1)!\, h^n x + \frac{(n+1)!\, n}{2} h^{n+1}. \tag{10}$$

(9) és (10) alapján (7)-ből

$$\triangle^n \varphi(0) = f^{(n)}(0)\, h^n + \frac{n}{2} f^{(n+1)}(0)\, h^{n+1}. \tag{11}$$

---

[15] R. Rothe[5] p. 314.

Mivel pedig (K_n) nyilván az $r(x)$-re is alkalmazható,

$$\Delta^n r(0) = h^n r^{(n)}(\bar{\vartheta} nh) \qquad (0 < \bar{\vartheta} < 1). \qquad (12)$$

És (7)-ből adódik

$$\varphi^{(n)}(x) = f^{(n)}(0) + x f^{(n+1)}(0). \qquad (13)$$

Már most (11), (12) és (13) alapján (8)-ból az 1. pontbelihez hasonló okoskodással nyerjük a tételt, qu. e. d.

3. A (K_n)-ben szereplő ϑ-ról éppen bebizonyított tétel csak speciális esete egy sokkal általánosabb tételnek. Ugyanis amint a bevezetésben láttuk (153. oldal), (K_n)-ben $\frac{1}{n!}\frac{\Delta^n f(a)}{h^n}$ nem más, mint x^n együtthatója abban a legfeljebb n-edfokú racionális egész függvényben, mely az *aequidistáns*

$$a,\ a+h, \ldots,\ a+nh$$

helyeken $f(x)$-szel megegyezik. Legyen már most

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_n$$

és jelentse $[a_0, a_1 \ldots, a_n]$ az x^n együtthatóját abban a legfeljebb n-edfokú $L(x)$ racionális egész függvényben, melyre

$$L(a_i) = f(a_i) \qquad (i=0, 1, \ldots, n).^{16} \qquad (14)$$

Tudjuk, hogy egy és csakis egy olyan $L(x)$ van, mely (14)-nek megfelel. Ez $L(x)$ meghatározását nevezzük LAGRANGE-*interpolációnak*. Ismeretes, hogy $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$-re a következő középértéktétel érvényes.

Ha $f(x)$ az (a_0, a_n) zárt intervallumban n-szer differenciálható,[17] akkor

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \qquad (a_0 < \xi < a_n).^{18} \qquad (15)$$

---

[16] V. ö. NÖRLUND: Vorlesungen über Differenzenrechnung, Berlin, Julius Springer, 1924. p. 8. Ha szükséges lesz, akkor az $[a_0, a_1, \ldots, a_n]f$ jelölést fogom használni, feltüntetendő, hogy az alapul választott függvény $f(x)$.

[17] Lásd [1].

[18] E tételt — más fogalmazásban — STIELTJES bizonyította be az $f^{(n)}(x)$ folytonosságának feltevése nélkül (l. STIELTJES[9] p. 48—51).

Ez Rolle tételének folyománya. (K_n) nem egyéb, mint (15) *aequidistáns* Lagrange-*interpoláció* esetében.

Már most használva a bevezetésben definiált kifejezésmódot (154. oldal), a (K_n)-beli ϑ-ra vonatkozó tétel jelzett általánosítása a következő.

Tétel. Legyen $f(x)$ valamely a hely környezetében n-szer differenciálható. Legyenek $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ e környezetben; akkor érvényes (15). *Azt állítom, hogy ha még $f^{(n+1)}(a)$ is létezik és $\neq 0$, úgy*

$$\frac{1}{a_n - a_0}\left(\xi - \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_n}{n+1}\right) \to 0, \tag{16}$$

midőn $a_0, a_1, \ldots, a_n \to a$ «szűkebb értelemben»; ez utóbbi megszorítás elesik, ha

$$\lim_{x_1 = a,\, x_2 = a} \frac{f^{(n)}(x_1) - f^{(n)}(x_2)}{x_1 - x_2} = f^{(n+1)}(a).^{19} \tag{F}$$

Bizonyítás. Először bebizonyítom a következő segédtételt.

Segédtétel. A $\varphi(x)$ függvényről tegyük fel, hogy $\varphi'(a) = 0$. Legyen $u \leqq a < b \leqq v$. Akkor

$$\frac{\varphi(a) - \varphi(b)}{u - v} \to 0, \tag{17}$$

midőn u és $v \to a$ «szűkebb értelemben»; ez utóbbi megszorítás elesik, ha

$$\lim_{x_1 = a,\, x_2 = a} \frac{\varphi(x_1) - \varphi(x_2)}{x_1 - x_2} = 0.^{20}$$

Az állítás második része evidens; foglalkozzunk az első részével.

A feltevés következtében

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x - a)\,\varepsilon(x), \tag{18}$$

ahol

---

[19] V. ö. szerzőtől: *Über einen Mittelwertsatz*, Mathematische Zeitschrift 25 (1926), p. 117.

[20] V. ö. Stieltjes[11] p. 71. ahol a tétel a sorok között be van bizonyítva az $u \leqq a \leqq v$ megszorítás mellett.

$$\lim_{x=a} \varepsilon(x) = 0. \tag{19}$$

Legyen $\varepsilon(a)$ bárhogyan definiálva. Jelentse d az $|u-a|$ és $|v-a|$ közül a nem kisebbiket. Minthogy a feltevés szerint $u<v$, azért $d \neq 0$. A megszorítás szerint

$$\left|\frac{u-v}{d}\right| \geqq \varrho > 0.$$

(18)-ból

$$\frac{\varphi(a)-\varphi(b)}{u-v} = \frac{d}{u-v}\left\{\frac{a-a}{d}\,\varepsilon(a) - \frac{b-a}{d}\,\varepsilon(b)\right\}. \tag{20}$$

De nyilván

$$\left|\frac{d}{u-v}\right| \leqq \frac{1}{\varrho}, \quad \left|\frac{a-a}{d}\right| \leqq 1, \quad \left|\frac{b-a}{d}\right| \leqq 1$$

s így (20)-ból (19) alapján következik (17).

Áttérek az eredeti tétel bebizonyítására. Legyen

$$\eta(x) = f^{(n+1)}(a)\,x^{n+1} - (n+1)!\,f(x) \tag{21}$$

és

$$\eta_1(x) = \eta(x) + (n+1)!\,L(x) - f^{(n+1)}(a)\left\{x^{n+1} - (x-a_0)\ldots(x-a_n)\right\}. \tag{22}$$

(14) és (21) folytán (22)-ből

$$\eta_1(a_i) = 0 \qquad (i=0, 1, \ldots, n),$$

tehát Rolle tétele alapján

$$\eta_1^{(n)}(\xi') = 0 \qquad (a_0 < \xi' < a_n). \tag{23}$$

Minthogy pedig

$$(x-a_0)\ldots(x-a_n) = x^{n+1} - (a_0 + a_1 + \cdots + a_n)\,x^n + \cdots,$$

azért (23) így alakul:

$$\eta^{(n)}(\xi') + (n+1)!\,L^{(n)}(\xi') - n!\,f^{(n+1)}(a)(a_0 + a_1 + \cdots + a_n) = 0. \tag{24}$$

De $L^{(n)}(x)$ konstans és $\frac{1}{n!} L^{(n)}(x)$ nem más, mint x^n együtthatója $L(x)$-ben, azaz éppen $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$, vagyis (15) szerint

$$L^{(n)}(\xi') = f^{(n)}(\xi).$$

Ennélfogva (21)-ből adódik

$$(n+1)!\,L^{(n)}(\xi') = (n+1)!\,f^{(n+1)}(\alpha)\,\xi - \eta^{(n)}(\xi). \tag{25}$$

Már most (24) és (25)-ből

$$\eta^{(n)}(\xi')-\eta^{(n)}(\xi)+(n+1)!\,f^{(n+1)}(\alpha)\left(\xi - \frac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{n+1}\right) = 0. \tag{26}$$

Azonban (21)-ből

$$\eta^{(n+1)}(\alpha) = 0,$$

s ha (F) fennáll, úgy általánosabban

$$\lim_{x_1=\alpha,\, x_2=\alpha} \frac{\eta^{(n)}(x_1) - \eta^{(n)}(x_2)}{x_1 - x_2} =$$

Tehát, tekintettel arra, hogy ξ és ξ' az a_0 és a_n közé esnek, a segédtétel alapján

$$\frac{\eta^{(n)}(\xi') - \eta^{(n)}(\xi)}{a_n - a_0} \to 0,$$

midőn $a_0, a_1, \ldots, a_n \to \alpha$ «szűkebb értelemben» illetve — ha (F) fennáll — e megszorítás nélkül. Következésképpen (26)-ból az $f^{(n+1)}(\alpha) \neq 0$ feltevés folytán adódik (16), qu. e. d.

4. Az általánosításban még tovább mehetünk és az előbbi tételt kiterjeszthetjük tetszőleges HERMITE-*féle interpoláció* esetére.

Mint a bevezetésben (151. oldal) említettem, HERMITE-féle interpolációval van dolgunk a következő feladat megoldásánál: *meghatározandó a $H(x)$ legfeljebb n-edfokú racionális egész függvény a*

$$H(a_i) = A_i^{(0)},\ H'(a_i) = A_i^{(1)}, \ldots,\ H^{(m_i-1)}(a_i) = A_i^{(m_i-1)} \tag{27}$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k)$$

adatokból, ahol

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_k$$

és

$$m_0 + m_1 + \cdots + m_k = n+1.$$

Egy és csakis egy olyan $H(x)$ van, mely a (27) alatti követeléseknek megfelel.[21] Ezt a LAGRANGE-*elv*[22] szerint a következőképpen határozzuk meg.

Először megoldjuk a feladatot mindazon speciális esetekre nézve, melyekben a (27) alatti adatok közül az egyik 1, a többi pedig 0. Legyen az $A_i^{(j)}=1$ esetnek megfelelő megoldás $H_{i,j}(x)$. Akkor a keresett függvény

$$H(x)=\sum_{i=0}^{k}\{A_i^{(0)}H_{i,0}(x)+A_i^{(1)}H_{i,1}(x)+\cdots+A_i^{(m_i-1)}H_{i,m_i-1}(x)\}.^{23}$$

---

[21] Ennek a determinánselméletet felhasználó bebizonyítására nézve l. STIELTJES[9] p. 57—60.

[22] FEJÉR LIPÓT: Interpolátióról, Math. és Természettud. Ért. XXXIV. (1916), p. 212.

[23] A
$$H_{i,0}(x),\ H_{i,1}(x),\ldots,\ H_{i,m_i-1}(x)\qquad (i=0,1,\ldots,k)$$
függvényeket az HERMITE-*féle interpoláció alapfüggvényeinek* nevezhetjük (v. ö. FEJÉR[22] p. 214). Megjegyzendő, hogy ezek függetlenek az $A_i^{(j)}$ adatoktól. $H_{i,j}(x)$ ilyen alakú

$$H_{i,j}(x)=\frac{\omega(x)}{(x-a_i)^{m_i}}E_{i,j}(x),$$

ahol

$$\omega(x)=(x-a_0)^{m_0}(x-a_1)^{m_1}\ldots(x-a_k)^{m_k},$$

és $E_{i,j}(x)$ legfeljebb (m_i-1)-edfokú racionális egész függvény, melyet úgy kell meghatároznunk, hogy

$$H_{i,j}(a_i)=\cdots=H_{i,j}^{(j-1)}(a_i)=0,\ H_{i,j}^{(j)}(a_i)=1,$$
$$H_{i,j}^{(j+1)}(a_i)=0,\ldots,\ H_{i,j}^{(m_i-1)}(a_i)=0$$

legyen. Ez $E_{i,j}(x)$ meghatározása úgy történhet, hogy a követelések alapján egymás után meghatározzuk az

$$E_{i,j}(a_i),\ E_{i,j}'(a_i),\ldots,\ E_{i,j}^{(m_i-1)}(a_i)$$

értékeket, miáltal $E_{i,j}(x)$-et véges TAYLOR-sorba fejtve írhatjuk fel. Megjegyzem még, hogy ha $H(x)$-et a leírt módon határozzuk meg, akkor a $\dfrac{H(x)}{\omega(x)}$ valódi racionális törtfüggvény parciális törtekre bontott alakban jelenik meg.

Tegyük fel már most $f(x)$-ről, hogy

$$f^{(m_i-1)}(a_i) \quad (i=0, 1,\dots, k) \tag{28}$$

léteznek. Legyenek az

$$\overbrace{a_0,\dots, a_0}^{m_0\text{-szor}}, \overbrace{a_1,\dots, a_1}^{m_1\text{-szer}},\dots, \overbrace{a_k,\dots, a_k}^{m_k\text{-szor}} \tag{29}$$

helyek valamilyen sorrendben

$$u_0, u_1,\dots, u_n.$$

Jelentse $[u_0, u_1,\dots, u_n]$ *az* x^n *együtthatóját abban a legfeljebb n-edfokú* $H(x)$ *racionális egész függvényben, melyre*

$$H(a_i) = f(a_i),\ H'(a_i) = f'(a_i),\dots,\ H^{(m_i-1)}(a_i) = f^{(m_i-1)}(a_i) \tag{30}$$

$$(i=0, 1,\dots, k).$$

Ezzel egy $n+1$ változós függvényt értelmeztünk minden oly $(u_0, u_1,\dots, u_n)$ helyen, melyre nézve a (28) alatti differenciálhányadosok léteznek. Ezt Ampère[24] után *interpolációs függvénynek* nevezhetjük. Könnyen belátható, hogy $H(x)$ az interpolációs függvényekkel így fejezhető ki:

$$H(x) = \sum_{l=0}^{n} [u_0, u_1,\dots, u_l]\,(x-u_0)\,(x-u_1)\dots(x-u_{l-1}). \tag{31}$$

A Lagrange-interpoláció speciális esetében, azaz ha $k=n$ és a fortiori $m_0 = m_1 = \dots = m_n = 1$, (31) az ismert Newton-féle interpolációs formula.[25]

A (15) középértéktétel általánositása tetszőleges Hermite-féle interpoláció esetére a következő.

Ha $f(x)$ *az* (a_0, a_k) *zárt intervallumban n-szer differenciálható,*[26] *akkor*

---

[24] Lásd Ampère[7].

[25] Nörlund[16] p. 11 form. (24).

[26] Lásd [1].

$$[\underbrace{a_0,\ldots,a_0}_{m_0\text{-szor}},\underbrace{a_1,\ldots,a_1}_{m_1\text{-szer}},\ldots,\underbrace{a_k,\ldots,a_k}_{m_k\text{-szor}}]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\quad (a_0<\xi<a_k). \quad (32)$$

Ez is ROLLE-tételének folyománya.[27]

Már most az előbbi pontban bebizonyított tételt általánosítom a (32)-ben szereplő ξ középhelyre a következőképpen (l. a bevezetésben a 154. oldalon).

I. Tétel. Legyen $f(x)$ valamely a hely környezetében n-szer differenciálható. Legyenek $a_0 < a_1 < \cdots < a_k$ e környezetben; akkor érvényes a (32). Azt állítom, hogy ha még $f^{(n+1)}(a)$ is létezik és $\neq 0$, úgy

$$\frac{1}{a_k-a_0}\left(\xi-\frac{m_0a_0+m_1a_1+\cdots+m_ka_k}{m_0+m_1+\cdots+m_k}\right)\to 0$$

midőn $a_0, a_1,\ldots, a_k \to a$ «szűkebb értelemben»; ez utóbbi megszorítás elesik, ha

$$\lim_{x_1=a,\,x_2=a}\frac{f^{(n)}(x_1)-f^{(n)}(x_2)}{x_1-x_2}=f^{(n+1)}(a).\text{[28]}$$

E tételnek egy speciális esetét (a 2. pontbeli tételen kívül) már R. ROTHE[29] bebizonyította. Legyen ugyanis

$$k=1,\ a_0=a,\ a_1=a+h,\ m_0=n,\ m_1=1.$$

Akkor (mint a bevezetésben láttuk) a (32) átmegy a véges TAYLOR-féle formulába, (T_n)-be (l. 153. oldal). Az I. tétel ez esetre alkalmazva azt mondja, hogy *(T_n)-ben $\vartheta\to\frac{1}{n+1}$ midőn $h\to 0$, feltéve, hogy $f^{(n+1)}(a)$ létezik és $\neq 0$.* Mint említettem (l. 151. old.),

---

[27] Lásd STIELTJES[9]. A (32) következő általánosítása szintén ROLLE tételének folyománya. (V. ö. STIELTJES[9] p. 56—57.)

Legyenek $f(x)$ és $\varphi(x)$ az (a_0, a_k) zárt intervallumban n-szer differenciálhatók. Akkor (a jelölésre nézve v. ö.[16])

$$f^{(n)}(\xi)[a_0,\ldots,a_k]\varphi-\varphi^{(n)}(\xi)[a_0,\ldots,a_k]f=0\quad (a_0<\xi<a_k).$$

Az $n=k=1$ esetben (mikor is a fortiori $m_0=m_1=1$) ez a differenciálszámítás CAUCHY-féle középértéktétele.

[28] Megjegyzem, hogy e tétel könnyen kiterjeszthető a [27] lábjegyzékben említett középértéktételre is

[29] R. ROTHE[5] p. 309—310.

R. ROTHE bebizonyította e tételt azon szűkebb feltevés mellett, hogy $f^{(n+1)}(x)$ *az a helyen folytonos és* $\neq 0$.

Az I. tétel egész általánosságban ugyanúgy bizonyitható be, mint a (16) alatti speciális esete. A különbség csak az, hogy az ottani egymástól különböző $a_0, a_1, \ldots, a_n$ helyek szerepét a (29) alatti helyek veszik át. Ennélfogva $L(x)$ helyébe $H(x)$ lép és most a (22) alatti $\eta_1(x)$-re ez érvényes:

$$\eta_1(a_i) = \eta_1'(a_i) = \cdots = \eta_1^{(m_i-1)}(a_i) = 0 \quad (i=0, 1, \ldots, k).$$ [30]

5. A I. tételt általánositom arra az esetre, midőn $f^{(n+1)}(a) = 0$. Egyszerűség kedvéért legyen $a = 0$. *Tegyük fel, hogy*

$$f^{(n+1)}(0) = f^{(n+2)}(0) = \cdots = f^{(n+s-1)}(0) = 0,\ f^{(n+s)}(0) \neq 0. \tag{33}$$

Akkor

$$\frac{1}{(a_k-a_0)^s}\left(\xi^s - \frac{\Sigma u_0 u_1 \ldots u_{s-1}}{\binom{n+s}{s}}\right) \to 0 \tag{34}$$ [31]

midőn $a_0, a_1, \ldots, a_k \to 0$ *«szűkebb értelemben». Itt* $\Sigma u_0 u_1 \ldots u_{s-1}$ *jelenti az* $u_0, u_1, \ldots, u_n$ *elemek s-ed osztályú ismétléses kombinációinak megfelelő szorzatok összegét.*

Bizonyítás. Először bebizonyítok két segédtételt.

---

[30] A I. tétel második része akkor is érvényes, ha $a = +\infty$ (vagy $-\infty$). Vagyis fennáll a következő tétel:

Tegyük fel, hogy

$$\lim_{x_1=+\infty,\, x_2=+\infty} \frac{f^{(n)}(x_1) - f^{(n)}(x_2)}{x_1 - x_2}$$

létezik és $\neq 0$. *Akkor*

$$\frac{1}{a_k - a_0}\left(\xi - \frac{m_0 a_0 + m_1 a_1 + \cdots + m_k a_k}{m_0 + m_1 + \cdots + m_k}\right) \to 0$$

midőn $a_0, a_1, \ldots, a_k \to +\infty$.

Ez a I. tételhez hasonlóan bizonyitható be.

[31] Emlékeztetek arra, hogy $u_0, u_1, \ldots, u_n$ az $\overbrace{a_0, \ldots, a_0}^{m_0\text{-szor}}, \ldots, \overbrace{a_k \ldots, a_k}^{m_k\text{-szor}}$ helyek valamilyen sorrendben.

1. Segédtétel. Az x^{n+s} függvényre nézve

$$[u_0, u_1, \ldots, u_n] = \Sigma u_0 u_1 \ldots u_{s-1}.\text{[32]} \tag{35}$$

Legyen $H(x)$ az a legfeljebb n-edfokú racionális egész függvény, mely megfelel a (30) alatti követeléseknek, midőn $f(x) = x^{n+s}$. Akkor az

$$x^{n+s} - H(x) = 0 \tag{36}$$

egyenlet gyökei (mindegyiket annyiszor írva fel, mint amennyi a multiplicitása)

$$u_0, u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+s-1},$$

ahol azonban $u_{n+1}, u_{n+2}, \ldots, u_{n+s-1}$ előttünk ismeretlenek. (36)-ban az x^n együtthatója $-[u_0, u_1, \ldots, u_n]$. Ez az egyenlet gyökeivel, mint ismeretes, így fejezhető ki:

$$-[u_0, u_1, \ldots, u_n] = (-1)^s \Sigma' u_0 u_1 \ldots u_{s-1}, \tag{37}$$

ahol $\Sigma' u_0 u_1 \ldots u_{s-1}$ jelenti az $u_0, u_1, \ldots, u_{n+s-1}$ elemek s-edosztályú ismétlés nélküli kombinációinak megfelelő szorzatok összegét. De — amint alább megmutatom —

$$\Sigma' u_0 u_1 \ldots u_{s-1} = (-1)^{s-1} \Sigma u_0 u_1 \ldots u_{s-1}. \tag{38}$$

Ennélfogva (37)-ből adódik (35).

A (38) $s=1$-re evidens, $s \geqq 2$ esetén pedig következőképpen látható be. Először is világos, hogy

$$\begin{aligned} \Sigma' u_0 u_1 \ldots u_{s-1} = u_0 \Sigma' u_1 u_2 \ldots u_{s-1} + u_1 \Sigma' u_2 \ldots u_s + \cdots + \\ + u_n \Sigma' u_{n+1} \ldots u_{n+s-1}, \end{aligned} \tag{39}$$

ahol pl. $\Sigma' u_2 \ldots u_s$ jelenti az $u_2, \ldots, u_{n+s-1}$ elemek $(s-1)$-edosztályú ismétlés nélküli kombinációinak megfelelő szorzatok összegét.

[32] Arra az esetre nézve, midőn $u_0, u_1, \ldots, u_n$ különbözők, v. ö. JACOBI: De functionibus alternantibus, Journal für die reine und angewandte Mathematik 22 (1841), p. 370 (Werke 3, p. 451—452; németül OSTWALD's Klassiker Nr. 77, p. 64.).

Megmutatom, hogy

$$\left.\begin{array}{ll}\Sigma' u_1 \dots u_r & = (-1)^r \overset{0}{\Sigma} u_0 \dots u_{r-1} \\ \Sigma' u_2 \dots u_{r+1} & = (-1)^r \overset{1}{\Sigma} u_0 \dots u_{r-1} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \Sigma' u_{n+1} \dots u_{r+n} & = (-1)^r \overset{n}{\Sigma} u_0 \dots u_{r-1}\end{array}\right\} \quad (r=1, 2, \dots, s-1), \qquad (40)$$

ahol pl. $\overset{2}{\Sigma} u_0 \dots u_{r-1}$ jelenti az $u_0, u_1, u_2,$ elemek r-ed osztályú ismétléses kombinációinak megfelelő szorzatok összegét.

A (40) alatti képletcsoport $r=1$-re igaz. Ugyanis (36)-ban x^{n+s-1} együtthatója 0 lévén,

$$u_0 + u_1 + \dots + u_{n+s-1} = 0.$$

És ha (40) r-re igaz, úgy igaz $r+1$-re is. Ez könnyen belátható annak alapján, hogy (36)-ban $x^{n+s-2}, \dots, x^{n+1}$ együtthatója is 0 lévén,

$$\Sigma' u_0 \dots u_j = 0 \qquad (j=1, 2, \dots, s-2).$$

Tehát (40) teljes indukcióval igazolható az $r=1, 2, \dots, s-1$ értékek mindegyikére.

Már most (39)-ből a (40) alatti, $r=s-1$-nek megfelelő képletcsoportra tekintettel

$$\Sigma' u_0 u_1 \dots u_{s-1} =$$

$$= (-1)^{s-1}\left(u_0 \overset{0}{\Sigma} u_0 \dots u_{s-2} + u_1 \overset{1}{\Sigma} u_0 \dots u_{s-2} + \dots + u_n \overset{n}{\Sigma} u_0 \dots u_{s-2}\right) =$$

$$= (-1)^{s-1} \Sigma u_0 u_1 \dots u_{s-1},$$

amivel (38)-at bebizonyítottuk.

2. *Segédtétel. Tegyük fel $\varphi(x)$-ről, hogy*

$$\varphi'(a) = \varphi''(a) = \dots = \varphi^{(\nu)}(a) = 0. \qquad (41)$$

Legyen $u \leqq a < b \leqq v$. Akkor

$$\frac{\varphi(a) - \varphi(b)}{(u-v)^\nu} \to 0, \qquad (42)$$

midőn u és $v \to a$ «szűkebb értelemben».[33]

---

[33] Megszorítás nélkül a tétel általánosságban nem érvényes még akkor sem, ha feltesszük, hogy $\varphi^{(\nu)}(x)$ az a helyen folytonos. Legyen pl.

Fejtsük $\varphi(x)$-et véges TAYLOR-sorba. (41)-re tekintettel

$$\varphi(x) = \varphi(a) + (x-a)^{\nu-1} \frac{\varphi^{\nu-1}(\tau)}{(\nu-1)!},$$

ahol τ az a és x közé esik. Ennélfogva

$$\frac{\varphi(a)-\varphi(b)}{(u-v)^\nu} = \frac{1}{(\nu-1)!}\left\{\left(\frac{a-a}{u-v}\right)^{\nu-1}\frac{\varphi^{(\nu-1)}(\tau_1)}{(u-v)} - \left(\frac{b-a}{u-v}\right)^{\nu-1}\frac{\varphi^{(\nu-1)}(\tau_2)}{u-v}\right\}, \tag{43}$$

ahol τ_1 az a és a, τ_2 az a és b közé esik. Jelentse d az $|u-a|$ $|v-a|$ közül a nem kisebbiket. Minthogy $u<v$, $d \neq 0$. A tett megszorítás szerint

$$\frac{|u-v|}{d} \geqq \varrho > 0.$$

(43) így írható:

$$\frac{\varphi(a)-\varphi(b)}{(u-v)^\nu} = \frac{1}{(\nu-1)!}\left(\frac{d}{u-v}\right)^\nu \left\{\left(\frac{a-a}{d}\right)^{\nu-1}\frac{\varphi^{(\nu-1)}(\tau_1)}{d} - \left(\frac{b-a}{d}\right)^{\nu-1}\frac{\varphi^{(\nu-1)}(\tau_2)}{d}\right\}. \tag{44}$$

De a $\varphi^{(\nu-1)}(a) = \varphi^{(\nu)}(a) = 0$ feltevés következtében világos, hogy

$$\frac{\varphi^{(\nu-1)}(\tau_1)}{d} \to 0, \qquad \frac{\varphi^{(\nu-1)}(\tau_2)}{d} \to 0.$$

Mivel pedig nyilván

$\varphi(x) = x^3$, $a = 0$, $\nu = 2$. Ekkor $\varphi'(0) = \varphi''(0) = 0$ és $\varphi''(x) = 6x$ folytonos. De megszorítás nélkül *nem igaz*, hogy

$$\frac{\varphi(a)-\varphi(b)}{(u-v)^2} \to 0 \quad (u \leqq a < b \leqq v),$$

midőn u és $v \to 0$. Legyen ugyanis $0 < u < a < b < v$ és válasszuk a és b-t úgy, hogy $a - b = \frac{u-v}{2}$. Akkor a középértéktétel alapján

$$\frac{\varphi(b)-\varphi(a)}{(u-v)^2} = \frac{b-a}{v-u}\,\frac{\varphi'(c)}{v-u} > \frac{1}{2}\,\frac{\varphi'(u)}{v-u} \qquad (a<c<b).$$

De fix u mellett $\frac{\varphi'(u)}{v-u}$ tetszőleges nagy, ha $v-u$ elég kicsiny.

$$\left|\frac{d}{u-v}\right| \leqq \frac{1}{\varrho}, \quad \left|\frac{a-\alpha}{d}\right| \leqq 1, \quad \left|\frac{b-\alpha}{d}\right| \leqq 1,$$

azért (44)-ből adódik (42).

Áttérek az eredeti tétel bebizonyítására. Legyen

$$f(x) = \frac{f^{(n+s)}(0)}{(n+s)!} x^{n+s} + \eta(x). \tag{45}$$

Akkor (32) az 1. segédtétel alapján így írható (v. ö.[16])

$$\begin{aligned} &\frac{f^{(n+s)}(0)}{(n+s)!} \Sigma u_0 u_1 \ldots u_{s-1} + [u_0, u_1, \ldots, u_n]\eta = \\ &= \frac{f^{(n+s)}(0)}{s!} \frac{\xi^s}{n!} + \frac{\eta^{(n)}(\xi)}{n!}. \end{aligned} \tag{46}$$

A (32) középértéktételt $\eta(x)$-re alkalmazva,

$$[u_0, u_1, \ldots, u_n]\eta = \frac{\eta^{(n)}(\xi')}{n!} \qquad (a_0 < \xi' < a_k). \tag{47}$$

(46) és (47)-ből

$$\frac{f^{(n+s)}(0)}{s!} \left(\frac{\frac{\Sigma u_0 u_1 \ldots u_{s-1}}{(n+1)\ldots(n+s)}}{s!} - \xi^s \right) = \eta^{(n)}(\xi) - \eta^{(n)}(\xi'). \tag{48}$$

De (45)-ből a (33) feltevés folytán

$$\eta^{(n+1)}(0) = \eta^{(n+2)}(0) = \cdots = \eta^{(n+s)}(0) = 0,$$

s minthogy a tett megszorítás szerint $a_0, a_1, \ldots, a_k \to 0$ «szűkebb értelemben» azért a 2. segédtétel értelmében

$$\frac{\eta^{(n)}(\xi) - \eta^{(n)}(\xi')}{(a_0 - a_k)^s} \to 0.$$

Ennélfogva (48)-ból az $f^{(n+s)}(0) \neq 0$ feltevés következtében adódik (34), qu. e. d.

6. A (32)-ben szereplő ξ középhelyről bebizonyítom még a következő tételt.[34]

---

[34] Ez általánosítása ennek a könnyen belátható tételnek: ha (32)-ben az $f(x)$ pontosan $(n+1)$-edfokú racionális egész függvény, akkor (32)-ből

$$\xi = \frac{m_0 a_0 + m_1 a_1 + \cdots + m_k a_k}{m_0 + m_1 + \cdots + m_k}.$$

Legyen $f^{(n)}(x)$ monoton, midőn $a_0 < x < a_k$, és legyen

$$\varphi(u, v) = \frac{f^{(n)}(u) - f^{(n)}(v)}{u - v}$$

korlátos midőn $a_0 < u < v < a_k$. Jelöljük $|\varphi(u, v)|$ alsó és felső határát μ és M-vel. Ha $M \neq 0$, akkor

$$\frac{1}{a_k - a_0} \left| \xi - \frac{m_0 a_0 + m_1 a_1 + \cdots + m_k a_k}{m_0 + m_1 + \cdots + m_k} \right| \leqq 1 - \frac{\mu}{M}; \tag{49}$$

az egyenlőségi jel csak $\mu = M$ esetén érvényes.

Bizonyítás. Legyen $H(x)$ a (30) alatti racionális egész függvény és (21) mintájára

$$\varrho(x) = Mx^{n+1} - (n+1)!\, f(x). \tag{50}$$

Akkor (32)-ből, a (26) levezetéséhez hasonlóan, adódik

$$\varrho^{(n)}(\xi_1) - \varrho^{(n)}(\xi) + (n+1)!\, M\left(\xi - \frac{m_0 a_0 + m_1 a_1 + \cdots + m_k a_k}{n+1}\right) = 0. \tag{51}$$

$$(a_0 < \xi_1 < a_k).$$

De (50)-ből

$$\varrho^{(n)}(x) = (n+1)!\,(Mx - f^{(n)}(x)),$$

s így (51) ezt az alakot ölti

$$\begin{aligned} M\left(\xi - \frac{m_0 a_0 + m_1 a_1 + \cdots + m_k a_k}{n+1}\right) &= \\ = f^{(n)}(\xi_1) - f^{(n)}(\xi) - M(\xi_1 - \xi). \end{aligned} \tag{52}$$

Ha $\xi = \xi_1$, úgy a tétel (52)-ből evidens. Ha $\xi \neq \xi_1$, akkor (52) így irható:

$$\begin{aligned} \xi - \frac{m_0 a_0 + m_1 a_1 + \cdots + m_k a_k}{n+1} &= \\ = (\xi_1 - \xi) \frac{1}{M} \left\{ \frac{f^{(n)}(\xi_1) - f^{(n)}(\xi)}{\xi_1 - \xi} - M \right\}. \end{aligned} \tag{53}$$

Mivel pedig nyilván

$$0 < \left| \frac{\xi - \xi_1}{a_k - a_0} \right| < 1,$$

azért (53)-ból

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_k-a_0}\left|\xi-\frac{m_0a_0+m_1a_1+\cdots+m_ka_k}{n+1}\right| &\leqq \\ \leqq \frac{1}{M}\left|\frac{f^{(n)}(\xi_1)-f^{(n)}(\xi)}{\xi_1-\xi}-M\right|&,\end{aligned} \tag{54}$$

ahol az egyenlőségi jel csak akkor érvényes, ha a jobboldal zérus.

Tegyük fel most pl., hogy $f^{(n)}(x)$ nem csökkenő.[35] Akkor μ és M jelentése folytán

$$\mu \leqq \frac{f^{(n)}(\xi)-f^{(n)}(\xi_1)}{\xi-\xi_1} \leqq M. \tag{55}$$

(54) és (55)-ből következik (49). Mivel (54)-ben az egyenlőségi jel csak akkor érvényes, ha a jobboldal eltűnik, azért (49)-ben csak úgy lehet érvényes, ha $\mu=M$. Ezzel a tételt teljesen bebizonyítottuk.

Legyen példának okáért

$$f(x)=\log x,$$
$$k=2,\ a_0=N,\ a_1=N+\nu,\ a_2=N+1,\ m_0=m_1=m_2=1,$$

ahol $N>0$, $0<\nu<1$. A Newton-féle interpolációs formulát alkalmazva

$$\begin{aligned}\log(N+\nu)=\log N+\nu\{\log(N+\nu)-\log N\}+\\ +\nu(\nu-1)[N,\ N+\nu,\ N+1],\end{aligned}$$

ahol (15) szerint

$$[N,\ N+\nu,\ N+1]=-\frac{1}{2\xi^2} \quad (N<\xi<N+1). \tag{56}$$

Az előbbi tétel nyilván alkalmazható. A jelen esetben

$$M=\frac{2}{N^3},\ \mu=\frac{2}{(N+1)^3}.$$

Tehát a tétel alapján (amint egyszerű számítás mutatja) (56)-*ban*

$$\xi=N+\frac{\nu+1}{3}+\sigma,$$

[35] Az ellenkező eset erre nyilván visszavezethető.

ahol

$$|\sigma| < \frac{3}{N} + \frac{3}{N^2} + \frac{1}{N^3},$$

és ha $N \to +\infty$, *úgy*

$$\sigma \to 0.$$

2. §. Az interpolációs függvény folytonosságáról.

7. STIELTJES a (15) középértéktétel alkalmazásával bebizonyította a következő tételt (l. a bevezetésben 155. old.).

Legyen $f(x)$ valamely a hely környezetében értelmezve. Legyenek $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ e környezetben; akkor $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ is értelmezve van. Ha már most $f^{(n)}(a)$ létezik, úgy

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] \to \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \tag{57}$$

midőn $a_0, a_1, \ldots, a_n \to a$ *azon megszorítással, hogy,* $a_0 \leq a \leq a_n$.[36]

Használva a bevezetésben definiált kifejezésmódot (154. old.), megmutatom, miszerint *elegendő az a megszorítás, hogy* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *«szűkebb értelemben» konvergáljanak* a*-hoz, és ez elesik, ha*

$$\lim_{x_1=a,\, x_2=a} \frac{f^{(n-1)}(x_1) - f^{(n-1)}(x_2)}{x_1 - x_2} = f^{(n)}(a). \tag{58}$$

Előre bocsátom a következő ismert segédtételt:

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] = \frac{[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}] - [a_1, a_2, \ldots, a_n]}{a_0 - a_n}.^{37} \tag{59}$$

Ez $n=1$ esetén evidens. Tegyük fel, hogy $n \geq 2$. Legyen $L(x)$ az a legfeljebb n-edfokú racionális egész függvény, melyre

$$L(a_i) = f(a_i) \qquad (i=0, 1, \ldots, n),$$

$\bar{L}(x)$ pedig az a legfeljebb $(n-2)$-edfokú, melyre

$$\bar{L}(a_i) = f(a_i) \qquad (i=1, 2, \ldots, n-1).$$

---

[36] L. STIELTJES[11].

[37] NÖRLUND[16] p. 8, form. (18).

A Newton-féle interpolációs formulát alkalmazva

$$L(x) = \bar{L}(x) + [a_0, \dots, a_{n-1}](x-a_1)\dots(x-a_{n-1}) + \\ + [a_0, \dots, a_n](x-a_0)\dots(x-a_{n-1}), \tag{60}$$

úgyszintén

$$L(x) = \bar{L}(x) + [a_1, \dots, a_n](x-a_1)\dots(x-a_{n-1}) + \\ + [a_0, \dots, a_n](x-a_1)\dots(x-a_n). \tag{61}$$

(60) és (61)-ből adódik (59).

Már most legyen

$$f(x) = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}x^n + \eta(x). \tag{62}$$

Evidens, hogy

$$[a_0, \dots, a_n]f = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} + [a_0, \dots, a_n]\eta.$$[38]

Tehát csak azt kell kimutatnunk, hogy

$$[a_0, \dots, a_n]\eta \to 0, \tag{63}$$

midőn $a_0, a_1, \dots, a_n \to a$ «szűkebb értelemben», illetve — ha (58) fennáll — e megszorítás nélkül. Alkalmazzuk $\eta(x)$-re (59)-et. A jobboldali interpolációs függvényekre alkalmazhatjuk a középértéktételt, ha csak a_0 és a_n az a-nak már elég kis környezetében vannak, mert $f^{(n-1)}(x)$ e környezetben létezik és (62) alapján ugyanez áll $\eta(x)$-re. Tehát

$$[a_0, \dots, a_n]\eta = \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{\eta^{(n-1)}(\xi) - \eta^{(n-1)}(\xi')}{a_0 - a_n} \tag{64}$$

$$(a_0 < \xi < a_n,\ a_0 < \xi' < a_n).$$[39]

De (62)-ből

$$\eta^{(n)}(a) = 0$$

s ha (58) fennáll, úgy általánosabban

$$\lim_{x_1=a,\ x_2=a} \frac{\eta^{(n-1)}(x_1) - \eta^{(n-1)}(x_2)}{x_1 - x_2} = 0.$$

Tehát (64)-ből a (17) segédtétel alapján adódik (63), qu. e. d.

---

38 V. ö. [16].

39 A bizonyítás eddig lényegileg megegyezik Stieltjes bizonyításával.

8. Mielőtt az (57) alatti tétel bizonyos általánosításáról szólnék, közbevetőleg egy észrevételt akarok tenni.

STIELTJES[40] előbbi tételét következőképpen általánosította.

Legyenek

$$f_i(x) \qquad (i=0, 1, \ldots, n)$$

az a helyen n-szer differenciálható függvények. Akkor

$$\frac{|f_0(a_i), f_1(a_i), \ldots, f_n(a_i)|}{|1, a_i, \ldots, a_i^n|} \to \left| f_i(a), \frac{f_i'(a)}{1!}, \ldots, \frac{f_i^{(n)}(a)}{n!} \right|,^{41}$$

midőn $a_0, a_1, \ldots, a_n \to a$ azon megszorítással, hogy $a_0 \leq a \leq a_n$.[42]

STIELTJES-szel szemben megjegyzem, hogy *e tétel az előbbinek folyománya, és pedig elegendő az a megszorítás, hogy $a_0, a_1, \ldots, a_n$ «szűkebb értelemben» konvergáljanak a-hoz.*

Ugyanis fennáll a következő egyszerű determinánstétel:

$$|f_0(a_i), f_1(a_i), \ldots, f_n(a_i)| = |[a_0] f_i, [a_0, a_1] f_i, \ldots, [a_0, a_1, \ldots, a_n] f_i| \cdot \Delta, \tag{65}$$

ahol

$$\Delta = (a_1 - a_0) \cdot (a_2 - a_0) \cdot (a_2 - a_1) \cdot \ldots \ldots (a_n - a_0) \cdot (a_n - a_1) \ldots (a_n - a_{n-1}).^{43}$$

---

[40] STIELTJES: Sur une généralisation de la formule des accroissements finis, Oeuvres 2. p. 113—121.

[41] A függélyes vonások közötti kifejezések determinánsokat jelentenek.

[42] E tétel az előbbinek valóban általánosítása, mert

$$[a_0, a_1, \ldots, a_n] f = \frac{|1, a_i, \ldots, a_i^{n-1}, f(a_i)|}{|1, a_i, \ldots, a_i^{n-1}, a_i^n|}.$$

L. pl. NÖRLUND[16] p. 9, form. (20). E képlet különben CRAMER szabálya szerint adódik abból az egyenletrendszerből, melyet a (14) feltételek a $L(x)$ együtthatóira szolgáltatnak.

[43] A VANDERMONDE-determináns szorzat-alakjára vonatkozó tétel ennek az a speciális esete, melyben $f_i(x) = x^i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Megjegyzendő, hogy a tétel általánosítható. Az $n = 4$ esetben pl.

$$|f_0(a_i), \ldots, f_4(a_i)| = |[a_0] f_i, [a_0, a_1] f_i, [a_0, a_1, a_2] f_i, [a_3] f_i, [a_3, a_4] f_i| \cdot \bar{\Delta},$$

ahol

$$\bar{\Delta} = (a_1 - a_0)(a_2 - a_0)(a_2 - a_1)(a_4 - a_3).$$

A bebizonyítás a szövegbelihez hasonló. (V. ö. STIELTJES[9] p. 59.)

Bizonyítás. Evidens, hogy

$$f_k(a_0) = [a_0]f_k \qquad (k=0, 1,\dots, n).$$[44]

Továbbá a LAGRANGE- és NEWTON-féle interpolációs formulákat alkalmazva

$$f_k(a_i) = \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(a_i - a_0)\dots|\dots(a_i - a_{i-1})}{(a_j - a_0)\dots|\dots(a_j - a_{i-1})} f_k(a_j) +$$

$$+ [a_0,\dots, a_i] f_k (a_i - a_0)\dots(a_i - a_{i-1})$$

$$(k=0, 1,\dots, n;\ i=1, 2,\dots, n).$$

Ezekre tekintettel, a determinánsok elemi tulajdonságai alapján adódik (65), qu. e. d.[45]

---

[44] V. ö. [16].

[45] STIELTJES megmutatta (l. STIELTJES[40] p. 122—123), hogy az idézett tétel alapján hogyan bizonyíthatók be bizonyos geometriai tételek, melyeknek szűkebb feltételek melletti bebizonyítására már H. A. SCHWARZ (Verallgemeinerung eines analytischen Fundamentalsatzes, Gesammelte mathematische Abhandlungen 2, p. 296—302) kijelölte az utat. E tételek egyike a következő:

Legyen adva az $y = f(x)$ egyenletű sík görbe. Tegyük fel, hogy $f''(\alpha)$ létezik és $\neq 0$. Legyen $a_0 < a_1 < a_2$. Akkor a $P(\alpha, f(\alpha))$ pontbeli osculáló kör a $P_i(a_i, f(a_i))$ $(i=0, 1, 2)$ pontokon átmenő kör határhelyzete, midőn $a_0, a_1, a_2 \to \alpha$ azon megszorítással, hogy $a_0 \leq \alpha \leq a_2$.

Hasonló tétel áll fenn az osculáló síkra, osculáló gömbre s i. t.

Meg akarom jegyezni, hogy *e tételek közvetlenül a 7. pontbeli tétel alapján nyerhetők a (65) alatti determinánstétel felhasználásával, és pl. az említett esetben elegendő az a megszorítás, hogy a_0, a_1, a_2 «szűkebb értelemben» konvergáljanak α-hoz.*

Az említett tétel bebizonyítása pl. röviden a következő:

Legyenek a $P_1P_2P_3$ kör középpontjának koordinátái a és b, a kör sugara legyen r. Akkor e kör egyenlete

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0.$$

Az a, b és $c = a^2 + b^2 - r^2$ e lineár egyenletrendszernek tesznek eleget:

$$a_i^2 + f(a_i)^2 - 2a_i a - 2f(a_i)\, b + c = 0 \qquad (i=0, 1, 2).$$

Ha innét a CRAMER-szabály szerint kiszámítjuk a és b-t s mindegyikben úgy a számlálóra, mint a nevezőre alkalmazzuk a (65) determinánstételt, akkor a 7. pontbeli tétel alapján, a lehető rövidítések után nyerjük, hogy

9. Visszatérek az (57) alatti STIELTJES-tételre. Evidens, hogy

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = [\overbrace{a, a, \ldots, a}^{n+1\text{-szer}}].$$

Tehát e tétel azt mondja, miszerint a szóban forgó esetben az $[a_0, a_1, \ldots, a_n]$ interpolációs függvény határértékét úgy kapjuk, hogy mindegyik argumentum helyébe az ő határértékét helyettesitjük. Be fogom bizonyitani, hogy ez akkor is érvényes, ha az argumentumok nem szükségképpen mind ugyanazon határértékhez, hanem csoportonként más és más határértékhez konvergálnak. Az általános tétel helyett elegendő lesz annak egy speciális esetét tárgyalnom.

Legyenek $\alpha < \beta$ *adott helyek. Tegyük fel* $f(x)$-ről, *hogy* $f''(\alpha)$ *és* $f'(\beta)$ *létezik. Legyen* $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. *Akkor*

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4] \to [\alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta],$$

midőn $a_0, a_1, a_2 \to \alpha$ *és* $a_3, a_4 \to \beta$ *«szűkebb értelemben»; ez utóbbi megszorítás elesik, ha*

$$\lim_{x_1=\alpha,\, x_2=\alpha} \frac{f'(x_1) - f'(x_2)}{x_1 - x_2} = f''(\alpha), \quad \lim_{\bar{x}_1=\beta,\, \bar{x}_2=\beta} \frac{f(\bar{x}_1) - f(\bar{x}_2)}{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = f'(\beta).$$

Bizonyítás. Legyen,

$$f(x) = H(x) + m(x), \tag{66}$$

ahol $H(x)$ az a legfeljebb 4-edfokú racionális egész függvény, melyre

$$\begin{gathered} H(\alpha) = f(\alpha),\ H'(\alpha) = f'(\alpha),\ H''(\alpha) = f''(\alpha), \\ H(\beta) = f(\beta),\ H'(\beta) = f'(\beta). \end{gathered} \tag{67}$$

$$a \to \alpha - \frac{f'(\alpha)[1+f'(\alpha)^2]}{f''(\alpha)}, \quad b \to f(\alpha) + \frac{1+f'(\alpha)^2}{f''(\alpha)}.$$

E határértékek azonban nem egyebek, mint a P-beli osculáló kör C középpontjának koordinátái. Tehát *a* $P_1P_2P_3$ *kör középpontja* C-*hez konvergál.* Mivel pedig e körnek pl. P_1 pontja az osculáló kör P pontjához konvergál, azért az előbbiből már következik, hogy *a* $P_1P_2P_3$ *kör sugara is az osculáló kör sugarához konvergál.* Ez az amit be akartunk bizonyitani.

(66)-ból nyilván

$$[a_0, \dots, a_4] f = [\alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta] f + [a_0, \dots, a_4] m.$$ [46]

Tehát csak azt kell bizonyítanunk, hogy

$$[a_0, \dots, a_4] m \to 0. \tag{68}$$

Az (59) alatti segédtételt alkalmazva

$$[a_0, \dots, a_4] m = \frac{[a_0, \dots, a_3] m - [a_1, \dots, a_4] m}{a_0 - a_4}.$$

A jobboldalon fellépett interpolációs függvényekre hasonló felbontást alkalmazhatunk, s í. t. Ezt folytassuk mindaddig, míg csupa olyan interpolációs függvényre nem jutunk, melyek mindegyikében külön-külön, az argumentumok limesze ugyanaz. Ezekre már a 7. pontbeli STIELTJES-tételt alkalmazhatjuk. E tétel értelmében azonban ez interpolációs függvények mindegyike $\to 0$, mert (66)-ból (67)-re tekintettel

$$m(\alpha) = m'(\alpha) = m''(\alpha) = 0, \quad m(\beta) = m'(\beta) = 0.$$

Tehát $[a_0, \dots, a_4] m$ mint oly törtek összege állott elő, melyeknek számlálói 0-hoz tartanak. A nevezőkben az $a_0, \dots, a_4$, argumentumokból képezett különbségekből alakított szorzatok állanak. De pl.

$$\lim (a_0 - a_4) = \alpha - \beta \neq 0,$$

és hasonló érvényes a többi szereplő különbségre is. Vagyis a nevezőknek 0-tól különböző limeszeik vannak. Ezek szerint az egyes törtek limesze 0, s így nyerjük (68)-at, qu. e. d.

A tétel akkor is érvényes, ha az $a_0, \dots, a_4$ argumentumok között egyenlők is vannak, azaz $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_4$. Ez könnyen belátható, ha meggondoljuk, hogy ekkor $[a_0, \dots, a_4]$ az éppen bebizonyított tétel értelmében hogyan fogható fel mint határérték. Ezzel a bevezetésben említett II. tételt (l. 156. oldal) teljesen bebizonyítottuk. *E szerint az interpolációs függvény a*

[46] V. ö. [16].

szónak bizonyos szűkebb értelmében folytonos, értelmezési tartományának bármely helyén.

E tételből két következtetést akarok vonni. Az előbbi speciális esetnél maradva, nevezzük az $y = H(x)$ egyenletű görbét az a, a, a, β, β helyek által meghatározott HERMITE-*parabolának*. Legyen $L(x)$ az a legfeljebb 4-edfokú racionális egész függvény, melyre

$$L(a_i) = f(a_i) \qquad (i = 0, 1, \ldots, 4);$$

$y = L(x)$ az $a_0, \ldots, a_4$ helyek meghatározta LAGRANGE-*parabola*. Már most az előbbi tételből következik, hogy az HERMITE-*parabola a* LAGRANGE-*parabola határhelyzete*. Ez világos, ha úgy $H(x)$-re, mint $L(x)$-re a (31) alatti felbontást alkalmazzuk, például a következőképpen:

$$\begin{aligned} L(x) &= [a_0] + [a_0, a_1](x-a_0) + [a_0, a_1, a_2](x-a_0)(x-a_1) + \\ &+ [a_0, a_1, a_2, a_3](x-a_0)(x-a_1)(x-a_2) + \\ &+ [a_0, a_1, a_2, a_3, a_4](x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3), \\ H(x) &= [a] + [a, a](x-a) + [a, a, a](x-a)^2 + \\ &+ [a, a, a, \beta](x-a)^3 + [a, a, a, \beta, \beta](x-a)^3(x-\beta). \end{aligned}$$

Az előbbi tétel alapján látjuk, hogy tényleg $L(x) \to H(x)$. Hangsúlyozom, hogy ez — a fenti tételben szereplő megszorítással — már az HERMITE-parabola puszta létezéséből következik.

Egy másik következtetés pedig ez:

Tartsuk meg a 4. pont jelöléseit. Tegyük fel, hogy $f^{(n+1)}(a)$ *létezik. Legyen*

$$\begin{aligned} f(x) &= H(x) + \\ &+ (x-a_0)^{m_0}(x-a_1)^{m_1}\ldots(x-a_k)^{m_k}\left\{\frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} + \varepsilon(x)\right\}. \end{aligned} \tag{69}$$

Akkor

$$\varepsilon(x) \to 0,$$

midőn $a_0, a_1, \ldots, a_k, x \to a$ *«szűkebb értelemben»; ez utóbbi megszorítás elesik, ha*

$$\lim_{x_1 = a,\, x_2 = a} \frac{f^{(n)}(x_1) - f^{(n)}(x_2)}{x_1 - x_2} = f^{(n+1)}(a).$$

Ugyanis

$$f(x) = H(x) + (x-a_0)^{m_0}(x-a_1)^{m_1}\dots(x-a_k)^{m_k}[\overbrace{a_0,\dots,a_0}^{m_0\text{-szor}},\dots,x],$$

s igy (69)-ből

$$\varepsilon(x) = [\overbrace{a_0,\dots,a_0}^{m_0\text{-szor}},\dots,x] - \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} =$$

$$= [\overbrace{a_0,\dots,a_0}^{m_0\text{-szor}},\dots,x] - [\overbrace{a,a,\dots,a}^{n+2\text{-ször}}].$$

E különbség pedig az előbbi tétel szerint $\rightarrow 0$.

E tételnek speciális esete a következő ismeretes tétel.[47] *Tegyük fel, hogy* $f^{(n+1)}(a)$ *létezik, és legyen*

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + \dots + (x-a)^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!} +$$

$$+ (x-a)^{n+1}\left\{\frac{f^{n+1}(a)}{(n+1)!} + \varepsilon(x)\right\}.$$

Akkor

$$\lim_{x=a} \varepsilon(x) = 0.$$

*

Végül, dolgozatom keletkezését illetőleg meg kell jegyeznem, hogy hálával tartozom Kürschák József professzor úrnak, amiért figyelmemet egy Schwarz—Stieltjes-féle középértéktételnél felmerülő kapcsolatos kérdésre irányította.

Szász Pál.

---

[47] Genocci-Peano: Calcolo differenziale, Torino 1884, p. XIX. A tétel itt bebizonyítás nélkül van közölve. A bebizonyításra nézve l. König Gyula: Analizis, Budapest 1887, p. 532—538 és Peano: Une nouvelle forme du reste dans la formule de Taylor, Mathesis 9 (1889), p. 182.

ÜBER EINIGE AUF DEN MITTELWERTSATZ DER DIFFERENTIALRECHNUNG BEZÜGLICHEN FRAGEN.

Es sei $f(x)$ eine eindeutige reelle Funktion der reellen Veränderlichen x. Es sei weiter

$$a_0 < a_1 < \cdots < a_k,$$

und die Ableitungen

$$f^{(m_0-1)}(a_0),\ f^{(m_1-1)}(a_1), \ldots,\ f^{(m_k-1)}(a_k)$$

seien vorhanden.

Bezeichnen

$$u_0, u_1, \ldots, u_n \qquad (n = m_0 + m_1 + \cdots + m_k - 1)$$

die Stellen

$$\overbrace{a_0, \ldots, a_0}^{m_0\text{-mal}},\ \overbrace{a_1, \ldots, a_1}^{m_1\text{-mal}}, \ldots,\ \overbrace{a_k, \ldots, a_k}^{m_k\text{-mal}}$$

n irgendeiner Reihenfolge, so bedeute nach Herrn N. Nörlund

$$[u_0, u_1, \ldots, u_n]$$

den Kœffizienten von x^n in derjenigen ganzen rationalen Funktion $H(x)$ vom Grade $\leqq n$, die den Interpolationsbedingungen

$$H(a_i) = f(a_i),\ H'(a_i) = f'(a_i), \ldots,\ H^{(m_i-1)}(a_i) = f^{(m_i-1)}(a_i)$$
$$(i = 0, 1, \ldots, k)$$

genügt.

Eine bekannte Verallgemeinerung des Mittelwertsatzes lautet nun in folgender Weise:

Ist $f^{(n-1)}(x)$ für $a_0 \leqq x \leqq a_k$ stetig und für $a_0 < x < a_k$ differenzierbar, so gilt die Formel

$$[u_0, u_1, \ldots, u_n] = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \qquad (a_0 < \xi < a_k).$$

In dieser Arbeit werden die unten folgenden Sätze I und II bewiesen. Zu ihrer bequemeren Formulierung bediene ich mich folgender Ausdrucksweise:

Ich sage, dass die, voneinander unabhängig, zu a konvergierenden Grössen $a_0 < a_1 < \cdots < a_k$, *im engeren Sinne konvergieren*, wenn stets

$$\frac{|a_0 - a_k|}{d} \geqq \rho$$

st, wo d den grösseren der beiden Abstände $|a_0 - a|$, $|a_k - a|$ bedeutet. ρ bezeichnet hierbei eine positive Grösse (die natürlich $\leqq 2$ ist).

Satz I. Es sei $f^{(n+1)}(a)$ vorhanden und $\neq 0$. Für $a_0, a_1, \ldots, a_k \to a$ strebt dann

$$\frac{1}{a_k - a_0}\left(\xi - \frac{m_0 a_0 + m_1 a_1 + \cdots + m_k a_k}{m_0 + m_1 + \cdots + m_k}\right) \to 0,$$

vorausgesetzt, dass $a_0, a_1, \ldots, a_k$ «im engeren Sinne» zu a konvergieren; die letztere Voraussetzung ist unnötig, falls $f^{(n+1)}(x)$ an der Stelle a stetig ist.[1]

Den Satz II werde ich der Einfachheit halber für einen speziellen Fall formulieren.

Satz II. Es seien $f''(a)$ und $f'(\beta)$ vorhanden. Es sei weiter $a_0 \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4$. Für $a_0, a_1, a_2 \to a$ und $a_3, a_4 \to \beta$ strebt

$$[a_0, a_1, a_2, a_3, a_4] \to [a, a, a, \beta, \beta],$$

vorausgesetzt, dass a_0, a_1, a_2 bzw. a_3, a_4 «im engeren Sinne» zu a bezw. *β konvergieren; die letztere Voraussetzung ist unnötig, falls $f''(x)$ an der Stelle a, und $f'(x)$ an der Stelle β stetig ist.*[2]

Paul v. Szász.

---

[1] Spezialfälle dieses Satzes wurden schon von R. ROTHE (Zum Mittelwertsatze der Differentialrechnung, Mathematische Zeitschrift 9 (1921), S. 314. bzw. 309—310) und von mir (Über einen Mittelwersatz, ebenda 25 (1926), S. 117—120), allerdings unter engeren Voraussetzungen als oben im Texte, bewiesen.

[2] Im speziellen Falle, wo die voneinander verschiedenen Werte a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 zu *demselben* Werte a konvergieren, wurde der Satz II (mit der grösseren Einschränkung $a_0 \leqq a \leqq a_4$) von STIELTJES (Quelques remarques à propos des dérivées d'une fonction d'une seule variable, Oeuvres 1, p. 69—71) bewiesen.

TANULÓVERSENYEK.

Jelentés az 1926. évi XXX.-ik mathematikai tanulóversenyről.

Az «Eötvös Loránd Math. és Phys. Társulat» XXX-ik mathematikai tanulóversenyét 1926 október 16-án tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Budapesten 41, Szegeden 6 versenyző jelentkezett; beadatott 24, illetőleg 4 dolgozat.

A verseny tételei a következők voltak:

1. Bebizonyítandó, hogy bárhogyan választjuk az a és b egész számokat az

$$x + y + 2z + 2t = a$$
$$2x - 2y + z - t = b$$

egyenletrendszernek mindíg van egész számokból álló megoldása.

2. Bebizonyítandó, hogy négy egymásra következő pozitív egész szám szorzata nem lehet egész számnak négyzete.

3. Egy kör gördül egy kétszer akkora sugarú körön, ennek belsejében. Milyen pályát ír le a gördülő kör kerületének valamely pontja?

A bizottság egyhangú javaslata így hangzik:

A bíráló-bizottság a dolgozatok tüzetes átvizsgálása után a következő javaslattal járul a választmány elé. Az első díjat BAKOS TIBOR, a szombathelyi m. kir. áll. reáliskolában GÁBRIEL JÁNOS és RADVÁNYI LÁSZLÓ tanítványa érdemli, aki a második és harmadik feladatot jól és szabatosan oldotta meg, továbbá az első feladatot is helyesen fogta fel, de a megoldás végének fogalmazásában azt a hibát követte el, hogy négy eset közül háromban a vizsgált feltételeknek szükséges voltát említi, holott a megoldás éppen elegendő voltukon alapszik. A második díjat WINKLER JÓZSEF, a budapesti V. ker. m. kir. áll. «Berzsenyi Dániel» gimnáziumban SCHMIEDT ALAJOS tanítványa kapja meg, aki mind a három feladatot jól oldotta meg, de megoldását igen pongyolán fogalmazta. A bizottság sajnálattal állapítja meg a dolgozatok túlnyomó részének fogalmazásában és külalakjában ez idén mutatkozó nagymérvű gondatlanságot.

Jelentés az 1926. évi VIII-ik fizikai tanulóversenyről.

Társulatunk «Károly Irén» fizikai tanulóversenyét 1926. évi október 23-án tartotta Budapesten és Szegeden egyidejűleg. Jelentkezett Budapesten 18, Szegeden 2 versenyző; beadtak Budapesten 13, Szegeden 2 dolgozatot.

A verseny tételei a következők voltak:

1. r sugarú vízszintes körpályán állandó szögsebességgel mozog egy hangzó síp.

a) Hogyan változik a síp hangjának magassága egy a keringés síkjában a pálya középpontjától l távolságban lévő pontból megítélve?

b) Mily befolyással van a tüneményre az l távolság?

2. Mily nagy gyújtótávolságú lencse ad N-szeres nagyítást, ha a tárgy és kép távolsága egymástól d?

Mekkora a gyújtótávolság, ha $N = 2$ és $d = 9$ cm.?

3. Két egymás felett d távolságban lévő vízszintes helyzetű nagy kiterjedésű fémlap közül az alsót földeljük, a felsőt pedig V volt potenciálra töltjük. A felső laphoz l hosszúságú selyemszálon m tömegű golyót függesztünk fel, amelynek e töltést adunk.

a) Mily nagy lesz a lengés ideje, ha $m = 0{\cdot}1$ g, $l = 18$ cm, $d = 20$ cm, $V = +9000$ volt, $e = +100$ statikai egység, $g = 881$ cm sec^{-2}?

b) Mily nagynak kell V-nek lennie, hogy a többi adatok megtartása mellett a lengésidő kétszer nagyobb legyen, mint elektromos mező nélkül?

A bizottság jelentésében sajnálattal állapította meg, hogy a harmadik feladatot egyetlen versenyző sem oldotta meg. Megoldotta a másik két feladatot: Bakos Tibor, a szombathelyi m. kir. áll. reáliskolában Radványi László tanítványa, ki az első díjat nyerte; Hirka László, a budapesti kegyesrendi gimnáziumban Pintér Mihály tanítványa, és Kurtz Géza (ki a második feladatot a legteljesebben oldotta meg), a budapesti «Kölcsey Ferenc» reálgimnáziumban Mende Jenő tanítványa között a bizottság a második díjat egyenlő részben megosztotta. A második feladat megoldásáért dicséretet nyert Rathing Ferenc, a budapesti «Bólyai János» reáliskolában Fröhlich Károly tanítványa.

TÁRSULATI ÉLET.

Az 1926. évben tartott XXXI-ik közgyűlés.

E közgyűlést a Társulat 1926 május 22-én tartotta meg. A titkári jelentés szerint az előző évben 8 előadóülésben 9 előadó 5 mathematikai és 4 fizikai tárgyú előadást tartott. A Mathematikai és Physikai Lapok XXXIII. évfolyamából ez évre két, összesen 11 ívnyi terjedelmű füzet jelent meg. A választmányból sorshúzás útján kiléptek: Bartoniek Géza, Fröhlich Károly, Jordán Károly, Kopp Lajos és Lóky Béla, akiket a közgyűlés újra egyhangúlag megválasztott. Ugyancsak egyhangúlag megválasztotta a közgyűlés az elhúnyt Réthy Mór helyére Szűcs Adolfot.

A Kőnig Gyula-jutalmat a biráló-bizottság Szőkefalvi Nagy Gyulának ítélte.

A Társulat elnöksége Mittag-Leffler tiszteleti tagot 80-ik születésnapján üdvözölte.

A közgyűlés kegyelettel megemlékezett Klein Felix külföldi tiszteleti tag, továbbá Réthy Mór választmányi és Wagner Alajos alapító tag elhunytáról.

A közgyűlés 1927 január 1-i hatállyal a tagdíjakat felemelte budapesti tagok számára 8 pengőre, vidékiek számára 6 pengőre.

Befizetett tagdíjak és adományok 1926. év május 1.-től, dec. 31.-ig.

(Ezrekben.)

Anderkó Aurél (130), Árvayné Ádám Margit (50), **B**alyi Ferenc (50), Bischitz László (100), Bricht Lipót (50), **C**sada Imre (51), Cseh Elekné (50), Csorba György (125), **E**berhard Béla (50), Emanuel László (50), **F**erenczi Zoltán (50), Fűzy Dezső (43·5), **G**otléb Béla (100), Gróh Gyula (100), Grosschmied Lajos (150), Grúz Tibor (50), **H**adarics Vendel (50), Hang Dániel (75), Hartly Domokos (75), Hoffmann Ernő (50), Holenda Barnabás (50), **K**almár László (tanár 50), Kalmár László (100), Kedves Miklós (50), Kilczer Gyula (50), Klug Lipót (150), Kövesi Ferenc (50), Kurajla Péter (50), **L**uckhaub Gyula (50), **M**agyar Márk (50), Molnár Imre (50), Molnár Tibor (50), Müller József (50), **N**eubauer Konstantin (100), Neumann Erzsébet (50), Nyári Béla (50), **Ö**veges József (50), **P**intér Mihály (50), **R**adó Simon (50), Rejtő Sándor (50), Renner János (50), Richter Rezső (100), Rucsinszky Lajos (100), **S**zekeres Kálmán (50), Székely Károly (50), Széky István (75), **T**eller Ede (50), Tolnay Jenő (50), Török Elemér (50), **U**jj Gyula (100), **V**ámos Sándor (50), Vigassy Lajos (50), **W**alther Béla (100), **Z**emplén Géza (50), **C**surgó ref. gimn. (100), **K**aposvár gimn. (50), **P**annonhalmi könyvtár (50).

Adományok.

Államsegély 3.500,000
Franklin-Társulat 3.417,600
N. N. 50,000
N. N. 300,000

A tagsági díjat a választmány 1925 jan. 1-től 3 aranykoronában (50,000 papirkoronában) állapította meg.

Az 1926. évi május hó 22-én tartott közgyűlés 1927 január 1.-i hatállyal a tagdíjakat felemelte, budapesti tagok számára 8 pengőre, vidéki tagok számára 6 pengőre.

Minthogy a Mathematikai és Physikai Lapok egyes régibb évfolyamai teljesen elfogytak, kérjük tisztelt tagtársainkat, akik azokat nélkülözhetik, bocsássák a Társulat rendelkezésére.

A folyóirat szellemi részét illető közlemények a szerkesztőkhöz küldendők és pedig a mathematikai tárgyúak *Fejér Lipót* (**V., Falk Miksa-utca 15.**), a fizikai tárgyúak pedig *Pogány Béla* (**I., Budafoki-út 8.**) címére. T. munkatársainkat kérjük, hogy kézirataikban lehető rövidségre törekedjenek, azokhoz néhány soros idegennyelvű összefoglalást mellékeljenek és hogy arra pontos címüket írják rá.

Minden önálló cikk szerzőjének 25 borítéknélküli különlenyomatot adunk. Címzett boríték és több különlenyomat csak a nyomdával való külön megegyezés alapján kapható.

A Társulat ügyvitelére vonatkozó levelek, tagajánlások és folyóirat-cserepéldányok *Pogány Béla* titkár címére küldendők.

A folyóirat és a meghívók expedíciójára vonatkozó kérdések, reklamációk, valamint a tagsági és előfizetési díjak *Nagy József* pénztáros címére (Vác, Kegyesrendi gimnázium.) intézendők.

Austauschexemplare von Zeitschriften erbitten wir an die Adresse des Geschäftsführenden Secretärs *B. Pogány*, Budapest, I., Budafoki-út 8.

On est prié d'envoyer les exemplaires d'échange des périodiques à l'adresse du sécretaire *B. Pogány*. Budapest, I., Budafoki-út 8.

Felhívás tagtársainkhoz!

A rendkívüli viszonyok súlyos helyzetbe sodorták Társulatunkat. Folyóiratunkat még redukált terjedelemben sem tudtuk volna megjelentetni, ha a tudományt megbecsülő, áldozatkész emberbarátok és intézmények nem jöttek volna segítségünkre. Ez a Társulatunk iránt megnyilvánuló bizalom mi ránk is kötelezettséget ró. Nekünk is erőnkhöz képest meg kell tennünk mindent, hogy Társulatunkat fenntartsuk és annak működését minél intenzivebbé tegyük. Ezt követeli tőlünk józanul felfogott saját érdekünk, ezt követeli hazánk érdeke is. Csak így alakul ki bennünk a jövőnk biztosításához annyira szükséges bizalmunk önmagunkhoz.

Kérjük ennélfogva tisztelt tagtársainkat,

1. hogy hátralékos tagdíjaikat (évenkint 3 aranykoronát) szíveskedjenek *Nagy József* pénztárnoknak (Vác, Kegyesrendi gimnázium) lehetőleg a mellékelt csekklap felhasználásával befizetni,

2. hogy megváltozott új címeiket közöljék a Társulat pénztárosával és hogy a világháború alatt és az utána következő időkben költözködésre kényszerített tagtársaink figyelmét hívják fel hasonló cselekedetre,

3. hogy gyüjtsenek új tagokat.

FRANKLIN-TÁRSULAT NYOMDÁJA : GÉCZY KÁLMÁN.